EM 7/8/9 - TD

Équations de Maxwell

EM7 — 01 Bilan énergétique d'un fil conducteur

On considère un fil cylindrique de longueur infinie, de conductivité γ, d'axe (Oz) et de rayon a, parcouru par un courant de densité volumique $\vec{\jmath}$ uniforme et permanent.

1) Exprimer le champ électrique $\vec{E}$ en fonction de I, γ et a.

2) Exprimer le champ magnétique $\vec{B}$.

3) Exprimer les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sur la surface latérale du fil, puis y calculer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$.

EM7 — 02 Rayon classique de l'électron

1) L'électron a-t-il un rayon ?

2) Quelle est la charge $-e$ d'un électron ? Quelle est sa masse m ?

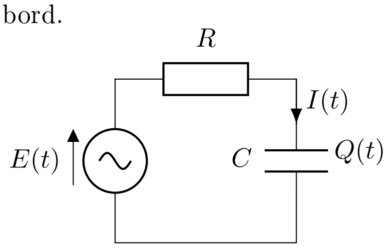
On appelle rayon classique de l'électron le rayon d'une boule de charge $-e$ uniformément répartie en volume, dont l'énergie électrostatique vaut $m\,c^2$ (énergie de masse d'un électron).

3) Calculer le rayon classique de l'électron. En faire l'application numérique.

Remarque : ce calcul est complètement fantaisiste, l'électron n'étant en aucun cas une « boule uniformément chargée ». Le rayon classique de l'électron n'a donc aucune signification physique réelle. Toutes les théories actuelles considèrent l'électron comme ponctuel, et plusieurs expériences conduisent à une borne supérieure pour l'éventuel « rayon » évaluée à 10^{-22} m, bien inférieure au rayon classique calculé ici.

EM7 — 03 Bilan énergétique d'un condensateur

Le condensateur d'un circuit électrique est constitué de deux disques métalliques, d'axe (Oz) et de rayon a, distants de e. On néglige tout effet de bord.



1) Quelles sont les valeurs des champs électrique et magnétique à l'intérieur du condensateur ? On ne se place pas dans le cadre de l'ARQS pour cette question.

2) Calculer, en fonction de $Q(t)$, $I(t)$, c et a, le rapport ϱ de la densité d'énergie électrique sur la densité d'énergie magnétique, en $r = a$.

3) On se place en régime libre ($E = 0$ V). Évaluer par les lois de l'électrocinétique le rapport Q/I en ordre de grandeur au début de la décharge du condensateur et en déduire une nouvelle expression de ϱ. Commenter la répartition de l'énergie électromagnétique dans l'ARQS.

4) Calculer le flux du vecteur de Poynting à travers les parois latérales du condensateurs, c'est-à-dire le cylindre d'axe (Oz), de rayon a et de hauteur e.

5) On donne l'équation locale de conservation de l'énergie électromagnétique

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\,E^2 + \frac{1}{2\,\mu_0}\,B^2\right) + \operatorname{div}\vec{\pi} = -\vec{\jmath}\cdot\vec{E}$$

Commenter cette expression dans le cadre du condensateur étudié.

EM7 — 06 Bilan énergétique dans un solénoïde infini

On étudie un solénoïde composé de N spires circulaires jointives de rayon a parcouru par un courant variable d'intensité $i(t)$. On supposera la longueur ℓ suffisamment grande devant a pour pouvoir négliger les effets de bords et considérer que le solénoïde peut être assimilé à un solénoïde infini. Dans cet exercice on se place dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires.

1) Donner le champ magnétique à l'intérieur et à l'extérieur du solénoïde.

2) Obtenir le champ électrique à l'intérieur du solénoïde. On supposera pour cela qu'il s'écrit

$$\vec{E} = E(r,t)\,\vec{e_\theta}$$

et on appliquera la loi de Faraday le long d'un contour bien choisi.

3) On précise le courant $i(t) = i_0 \cos(\omega\, t)$. Calculer la densité volumique d'énergie magnétique u_B et la densité volumique d'énergie électrique u_E.

4) Calculer alors le rapport $\langle u_E \rangle / \langle u_B \rangle$, où $\langle \cdot \rangle$ désigne la valeur moyenne temporelle sur une période. Dans l'ARQS, on a $\lambda \gg a$, avec λ la longueur d'onde dans le vide de l'onde électromagnétique. Conclure.

5) Calculer le flux du vecteur de Poynting à travers le solénoïde de longueur ℓ.

6) Calculer l'énergie électromagnétique $\mathcal{E}$ contenue dans le solénoïde de longueur ℓ, de deux manières différentes. On rappelle l'expression intégrale de l'équation de Poynting dans le vide

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = -\oiint \vec{\pi} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

7) En déduire l'inductance L du solénoïde.

EM7 — 05 Approximation des régimes quasi-stationnaires

1) On étudie un signal électrique périodique, de période T, dans un circuit de taille typique L. Rappeler l'expression de l'approximation des régimes quasi-stationnaires, en fonction de T et du temps τ de propagation sur la longueur L.

2) On cherche à donner un critère de validité de l'ARQS en terme de longueur (et non plus en terme de temps). Quelle est la relation de dispersion (dans le vide) des ondes électromagnétiques ? En déduire la longueur d'onde λ de l'onde électromagnétique de période T. Obtenir alors un nouveau critère de validité de l'ARQS, cette fois en fonction de λ et L.

3) Faire l'application numérique de λ pour un signal de fréquence $f = 10^3$ Hz (typique en TP d'électronique). Conclure.

4) Pour un signal de fréquence $f = 50$ Hz, quelle est la taille critique du circuit au delà de laquelle le critère n'est plus vérifié ? Conclure quant aux lignes à haute tension.

EM7 — 07 Courants de Foucault et plaque à induction (Résolution de problème)

On étudie un disque épais, de rayon R et de hauteur h selon l'axe (Oz), de conductivité électrique γ. Il est plongé dans un champ magnétique $\vec{B} = B_0 \cos(\omega\, t)\,\vec{e_z}$.

1) Pourquoi apparaît-il des courants dans le volume du disque ? Ceux-ci sont appelés courants de Foucault. Calculer l'énergie dissipée dans le disque.

2) En déduire les caractéristiques d'une bonne casserole à induction.

Données. On donne le rotationnel en coordonnées cylindriques (pas forcément nécessaire)

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e_r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r\,A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e_z}$$

et un élément de volume en coordonnées cylindriques $\mathrm{d}\tau = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$.

Aide. On pourra supposer que le champ électrique s'écrit $\vec{E} = E(r,z,t)\,\vec{e_\theta}$.

EM7 — 04 Capacité d'un condensateur sphérique (Résolution de problème)

1) Par un raisonnement énergétique, déterminer la capacité d'un condensateur sphérique, ce dernier étant composé de deux sphères concentriques, chargées avec deux charges opposées et uniformément réparties en surface. La sphère intérieure de rayon R_1 porte la charge $+Q$ et l'extérieure de rayon R_2 porte $-Q$.

EM7 — 10 Décharge d'une sphère

On considère une boule chargée en surface avec la charge q à l'instant $t = 0$. Cette boule est plongée dans l'air de conductivité γ, suffisament faible pour qu'on puisse considérer l'évolution quasi-statique.

1) Décrire l'évolution du système, puis calculer $q(t)$.

2) On donne $\gamma = 5 \times 10^{-15}$ S $\cdot$ m^{-1}. Au bout de combien de temps la boule est-elle déchargée ?

3) Calculer l'énergie dissipée dans le milieu au cours de la décharge de deux manières différentes.

Données : $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}$ F $\cdot$ m^{-1}.

EM7 — 08 Cerceau dans un champ magnétique (Résolution de problème)

On considère un cerceau d'axe (Oz) chargé, avec une charge linéïque λ. Le rayon du cerceau est noté R. On le plonge dans un champ magnétique

$$\vec{B} = B_0 \frac{t}{\tau} \vec{e_z} \qquad \text{avec} \qquad 0 \leqslant t \leqslant \tau.$$

Pour $t \leqslant 0$ et $t \geqslant \tau$, le champ magnétique est nul. On précise qu'au début de l'expérience, à $t = 0$, le disque est immobile.

1) Décrire l'évolution du système.

2) On note $\omega(t)$ la vitesse angulaire du cerceau. Obtenir $\omega(t)$.

EM7 — 09 Matériaux supraconducteurs

On étudie un matériau supraconducteur. Ses lois constitutives sont

$$\varrho = 0 \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{\jmath} = -\Lambda \vec{B}$$

avec $\Lambda > 0$ une constante. La deuxième relation est appelée **loi de London**, qu'on opposera à la loi d'Ohm des milieux conducteurs. Ces matériaux ont des propriétés magnétiques intéressantes : en régime permanent, ils « expulsent » le champ magnétique. C'est ce qu'on souhaite démontrer ici.

1) Quelle est l'unité de Λ ?

2) Obtenir l'équation différentielle vérifiée par $\vec{B}$ en régime permanent, en calculant $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{B}\right)$.

3) Faire apparaître dans cette équation une longueur caractéristique, notée δ.

4) On considère qu'un supraconducteur de ce type occupe tout le demi-espace $x > 0$ et qu'il règne dans l'espace extérieur un champ permanent uniforme $\vec{B_0} = B_0 \vec{e_z}$. La modélisation des distributions est volumique et n'introduit donc pas de discontinuités spatiales du champ magnétique. En utilisant les invariances du problème, montrer que le champ dans le supraconducteur s'écrit sous la forme $\vec{B}(M) = \vec{B}(x)$.

5) Expliciter le champ permanent régnant dans le supraconducteur.

6) En déduire la densité volumique de courant.

7) L'ordre de grandeur du paramètre δ est de 5×10^{-8} m. Commenter.

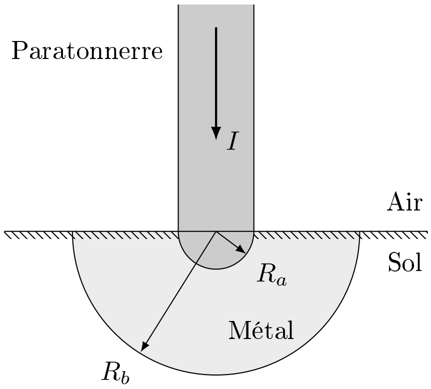
Donnée. On a pour tout champ de vecteur $\vec{A}$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{A} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \mathrm{div}\, \vec{A} - \Delta \vec{A}$$

EM7 — 11 Coup de foudre

Une prise de terre, schématisée ci-dessous, est constituée d'une coque hémisphérique métallique de centre O, de rayon intérieur R_a et de rayon extérieur R_b. On note γ_m la conductivité électrique du métal qui la constitue. Cette prise est enfoncée dans le sol, assimilé au demi-espace $z < 0$ et de conductivité électrique γ_s.

La prise de terre se décompose ainsi en deux résistances hémisphériques R_m et R_s, l'une en métal de rayon intérieur R_a et de rayon extérieur R_b, l'autre associée au sol de rayon intérieur R_b et de rayon extérieur infini. Elle est destinée à recevoir un courant I provenant d'un paratonnerre. Le courant est supposé indépendant du temps et descendant. On suppose que le courant qui traverse la prise de terre est radial. Sa densité est de la forme $\vec{j} = j(r)\,\vec{e_r}$ en coordonnées sphériques.



1) Rappeler l'unité de $j(r)$, puis donner l'expression de $j(r)$ en fontion de I et de r.

2) Exprimer alors le champ électrique régnant dans le sol.

3) En déduire, en fonction de I, r et γ_s, l'expression du potentiel électrique $V(r)$ régnant dans le sol. On supposera $V = 0$ très loin du point O.

Cette répartition non uniforme du potentiel à la surface du sol explique le foudroiement **indirect** des hommes ou des animaux. On appelle R_h la résistance électrique du corps humain mesurée entre ces deux pieds supposés distants de a. Pour ne pas être électrocuté (c'est-à-dire pour que son corps ne soit pas traversé par un courant supérieur à une valeur seuil notée $I_{\max}$), un homme doit rester éloigné d'une distance au moins égale à D de la prise de terre.

4) Obtenir une relation entre D, R_h, I, $I_{\max}$, a et γ_s.

5) En supposant $D \gg a$, exprimer D en fonction de R_h, I, $I_{\max}$, a et γ_s. Faire l'application numérique de D pour $I = 5{,}0 \times 10^4$ A.

6) Ce phénomène d'électrocution à distance touche-t-il plutôt les grands animaux (vaches, chevaux,...) ou les petits animaux (renards, lapins,...) ?

On étudie maintenant la résistance électrique équivalente de la prise de terre. On considère pour cela une coque hémisphérique de conductivité γ_m, de rayon intérieur R_a et de rayon extérieur R_b. La coque est parcourue par un courant radial. On la décompose en une infinité de coques hémisphériques élémentaires comprises entre les rayons r et $r + \mathrm{d}r$.

7) Exprimer la résistance élementaire $\mathrm{d}R_c$ d'une coque hémisphérique élémentaire, en fonction de r, $\mathrm{d}r$ et γ_m.

8) En déduire la résistance totale R_c de la coque hémisphérique en fonction de γ_m, R_a et R_b.

9) Donner l'expression de la résistance globale R_{glob} de la prise de terre en fonction de γ_m, γ_s, R_a et R_b.

10) Faire l'application numérique de R_{glob} pour $R_a = 1{,}0$ cm, $R_b = 35$ cm et $\gamma_m = 6{,}0 \times 10^7$ S·m^{-1}. La législation en terme de sécurité électrique impose $R_{\text{glob}} < 25\,\Omega$. Est-ce respecté dans le cas de cette prise ? Sinon, que préconisez-vous pour remédier à ce problème ?

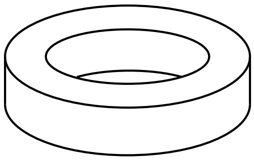
Données :

- conductivité électrique du sol $\gamma_{\text{sol}} = 1{,}0 \times 10^{-2}$ S·m^{-1} ;
- résistance électrique entre les deux pieds d'un être humain $R_{\text{h}} = 2{,}5$ kΩ ;
- longueur d'un pas humain $a = 1{,}0$ m ;
- courant d'électrocution d'un être humain $I_{\max} = 25$ mA.

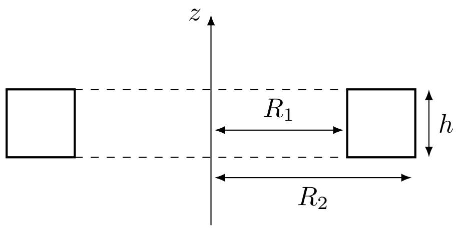
On donne aussi le gradient en coordonnées sphériques : $\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \dfrac{\partial f}{\partial r}\,\vec{e_r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\,\vec{e_\theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}\,\vec{e_\varphi}$

EM7 — 12 Magnétorésistance par effet Corbino

On considère un anneau cylindrique de métal d'axe $(O, \overrightarrow{u_z})$, de conductivité γ, de rayon interne R_1 et externe R_2 et de hauteur h.



Vue en perspective



Vue en coupe

1) Sa face interne est mise en contact avec une électrode de potentiel V_1, et sa face externe est en contact avec une électrode de potentiel V_2. Déterminer la résistance électrique R de l'anneau. On donne le gradient en cylindrique

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\overrightarrow{e_z}$$

2) Par rapport à la question précédente, on ajoute un champ magnétique $\overrightarrow{B} = B\,\overrightarrow{u_z}$ statique. On rappelle que, dans le modèle de Drüde, les porteurs de charges libres sont soumis, de la part du métal, à une force de frottement fluide $\overrightarrow{F} = -m\,/\,\tau\,\overrightarrow{v}$, où $\overrightarrow{v}$ désigne la vitesse du porteur dans le référentiel du métal, m est la masse d'un porteur et τ un temps caractéristique. On note aussi $C_H = 1\,/\,(n\,q)$ où n est la densité volumique de porteurs de charge libres et q la charge d'un de ces porteurs. En effectuant une étude à la manière du modèle de Drüde, établir une équation liant $\overrightarrow{\jmath}$, $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ en régime stationnaire. En déduire que la nouvelle expression de la résistance R' en présence de $\overrightarrow{B}$ est

$$R' = R\,\left(1 + C_H^2\,\gamma^2\,B^2\right)$$

EM7 — 13 Énergie de constitution d'une boule chargée

On considère une boule de rayon R, uniformément chargée, de charge totale Q.

1) On note ϱ la densité volumique de charge. Que vaut-elle ? Calculer le champ électrique que la boule engendre dans tout l'espace.

2) On se propose de calculer l'énergie de constitution électrostatique de cette boule, de deux manières différentes. Pour commencer, cette énergie s'écrit

$$\mathcal{E} = \mathcal{C}\,Q^\alpha\,\varepsilon_0^\beta\,R^\gamma$$

où $\mathcal{C}$ est une constante sans dimension. Trouver α, β et γ par analyse dimensionnelle.

3) La première méthode consiste à imaginer le processus de création de cette boule par l'adjonction progressive de charges apportées de l'infini. On rappelle que le volume de la coquille sphérique entre r et $r + \mathrm{d}r$ est $4\,\pi\,r^2\,\mathrm{d}r$. Partant d'une boule de rayon r déjà constituée, quelle énergie faut-il dépenser pour augmenter son rayon de $\mathrm{d}r$ en lui ajoutant des charges venant de l'infini ?

4) En déduire l'énergie de constitution de la boule de rayon R, et identifier $\mathcal{C}$.

5) La deuxième méthode est d'identifier l'énergie de constitution de la charge comme l'énergie électrostatique totale qu'elle produit. Rappeler la densité volumique d'énergie électromagnétique u.

6) Montrer qu'on retrouve par ce raisonnement la valeur de l'énergie de constitution. On rappelle l'identification suivante pour les intégrations sur tout l'espace en sphérique

$$\iiint f(r)\,\mathrm{d}V = 4\,\pi \int_0^\infty r^2\,f(r)\,\mathrm{d}r$$

7) Proposer une application numérique pour le noyau d'un atome. Quel phénomène physique explique que le noyau ne se désintègre pas en libérant toute cette énergie électrostatique ?

EM7 — 14 Caractéristique d'une diode à vide

Une diode à vide est un tube électronique faisant office de diode (voir photo ci-contre). Elle a été inventée en 1903 par J. Fleming et a été principalement utilisée au cours du début du XXe siècle. Elle se compose essentiellement d'une cathode, chargée d'émettre des électrons, et d'une anode, cylindre de tôle mince entourant la cathode, dont le rôle est de capter ces électrons. En oubliant cette géométrie cylindrique, on modélise la diode à vide par deux plaques planes de surface S parallèles entre elles et séparées d'une distance d. Entre les deux règne un vide poussé. Les deux plaques sont soumises à une différence de potentiel U. La plaque de gauche en $x = 0$, de potentiel nul, émet des électrons initialement de vitesse nulle qui sont ensuite captés par la plaque de droite, en $x = d$, de potentiel U. On suppose le régime stationnaire établi. Il règne alors un courant I uniforme entre les deux plaques.

1) Relier la vitesse des électrons à l'abscisse x au potentiel électrique à l'abscisse x.

2) On note j_0 la densité surfacique de courant (uniforme, comme mentionné par l'énoncé), et $\varrho(x)$ la densité volumique de charge à l'abscisse x. Relier j_0 et $\varrho(x)$.

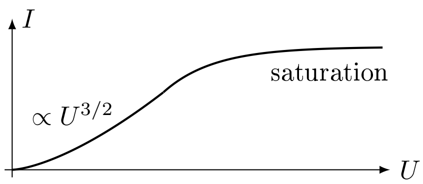
3) À l'aide des équations de Maxwell, obtenir l'équation différentielle vérifiée par le potentiel $V(x)$ faisant intervenir $\varrho(x)$ (appelée équation de Poisson).

4) On admet que $V'(0) = 0$. Résoudre cette équation (astuce : la multiplier par $V'(x)$ pour faire apparaître des dérivées connues) et obtenir le lien entre la tension U et le courant I en convention récepteur pour la diode à vide. Ce lien est appelé **la caractéristique courant-tension** du dipole, et son expression analytique est la **loi de Child-Langmuir**

$$I = \frac{4\,S\,\varepsilon_0}{9\,d^2}\sqrt{\frac{2\,e}{m}}\,U^{3/2}$$

5) Sans calcul, en quoi le système étudié est-il une diode ?

Remarque. La caractéristique que nous venons de calculer est en fait seulement valable aux faibles tensions. Pour des plus fortes tensions, le courant finit par saturer, comme schématisé ci-dessous.



Remarque. On pourra consulter `http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/electro/diodeVideCar.html` ainsi que `http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/electro/diodeVide.html`.

Remarque. Les diodes à vide sont aujourd'hui largement tombées en désuétude. L'essentiel des diodes utilisées de nos jours sont construites à partir de matériaux semi-conducteurs (en fait quasi-exclusivement de silicium).

EM7 — 15 Matériau radioactif

Un petit matériau radioactif, assimilé à un point matériel placé en O, émet de façon isotrope des particules α (chargées positivement). On note $q(t)$ la charge du matériau.

1) Calculer le champ magnétique $\vec{B}(r,t)$ en tout point de l'espace, à l'instant t.

2) Calculer le vecteur densité de courant $\vec{j}(r,t)$ à l'instant t, en fonction de $q(t)$.

3) Calculer le vecteur densité de courant de déplacement $\overrightarrow{j_D}(r,t)$. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

EM7 — 16 Équation de conservation de l'énergie électromagnétique

On considère une onde électromagnétique quelconque se propageant le long d'un cylindre vide de section S et d'axe (Ox) ; et on choisit comme système une portion de cylindre entre x et $x + \mathrm{d}x$.

1) Quelle est l'énergie électromagnétique de ce système ?

2) Quelle est l'énergie qui entre dans ce système entre t et $t + \mathrm{d}t$? Quelle est l'énergie qui en sort ?

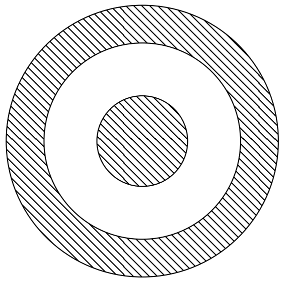
3) Y a-t-il de l'énergie dissipée dans le cylindre ?

4) Obtenir alors l'équation de conservation de l'énergie électromagnétique à une dimension dans le vide.

EM7 — 17 Champ $\vec{B}$ dans un câble coaxial

☐☐☐☐☐

On considère un câble coaxial constitué d'un cylindre métallique central plein, de rayon R_1, de vide, puis d'une couche périphérique de rayon interne R_2 et externe R_3. Le câble est infiniment long selon $\vec{u_z}$. Un courant constant $+i$ circule dans le coeur (l'âme) et un courant constant $-i$ circule dans la couche périphérique (la gaine). La densité de courant est supposée uniforme.



1) Calculer $\vec{B}$ partout, et tracer $||\vec{B}||$.

2) Pour simplifier les calculs dans la suite, on considère désormais que les courants ne circule qu'en surface (sur R_1, et sur $R_2 = R_3$). Tracer de nouveau $||\vec{B}||$ sans calculs excessifs.

3) Rappeler l'expression de la densité volumique d'énergie électromagnétique. Calculer ensuite U_m l'énergie magnétique contenue dans une portion de câble de longueur ℓ.

4) Par analogie avec l'énergie stockée dans une bobine en électrocinétique, définir l'inductance linéïque $\Lambda = L/\ell$ du câble. En faire l'application numérique avec $R_1 = 0{,}5$ cm, $R_2 = 1$ cm et $\ell = 1$ m.

Données : un volume infinitésimal en coordonnées cylindriques est $\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$.