O5-Cours

Phénomènes d'absorption et de dispersion

► C'est l'un des chapitres les plus importants de l'année. On discute comment la connaissance de l'équation d'onde (ou, de manière équivalente, de la relation de dispersion) permet de caractériser la propagation d'une onde, en spécifiant d'une part **l'absorption** et d'autre part **la dispersion** qu'elle peut subir.

► Pour l'instant, on connait bien l'équation de d'Alembert, qui caractérise un phénomène de propagation d'onde sans absorption ni dispersion. Mais cette situation est en fait un cas très particulier parmi les équations d'onde (linéaires) ! Dans le cas général, une onde subit des « distorsions » lors de sa propagation. Ces « distorsions » sont classifiées en deux catégories (et seulement deux) : il s'agit soit d'absorption soit de dispersion.

► Ce chapitre est très général ! Les phénomènes de dispersion et d'absorption qu'on y étudie **concernent tous les phénomènes ondulatoires** (les ondes sur les cordes, les ondes sonores, les ondes électromagnétiques,...).

► Idée du chapitre : **le vecteur d'onde $\underline{\vec{k}}$ devient complexe**.

Table des matières

1 Retour sur les relations de dispersion

1.1 Généralités et un exemple

Définition. Relation de dispersion. Lorsqu'une OPPH vérifie une équation d'onde, sa pulsation ω et son vecteur d'onde $\vec{k}$ sont reliés entre eux par **une relation de dispersion**

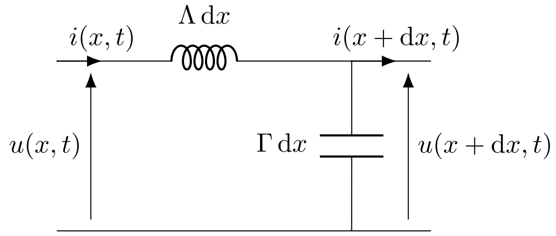
$$\boxed{\omega = f(\vec{k})}$$

Propriété. La relation de dispersion est équivalente à l'équation d'onde. Autrement dit, une équation d'onde conduit à une seule relation de dispersion et une relation de dispersion provient d'une seule équation d'onde.

Méthode. Pour obtenir une relation de dispersion, il faut

1. obtenir l'équation d'onde ;
2. considérer une OPPH et l'utiliser dans l'équation d'onde ;
3. conclure que l'OPPH est solution seulement pour une certaine relation entre ω et k.

Un exemple. Le câble coaxial idéal. On étudie une onde de tension qui se propage dans un câble coaxial. Le câble est caractérisé par une inductance par unité de longueur (inductance linéïque) Λ et par une capacité linéïque Γ ; et on en modélise une portion de longueur $\mathrm{d}x$ par le circuit électrocinétique suivant :



On note u_Λ la tension aux bornes de la bobine (en convention récepteur) et i_Γ le courant (aussi en convention récepteur) dans la branche contenant la capacité. On a donc

$$u_\Lambda = \Lambda\,\mathrm{d}x\,\frac{\partial i}{\partial t}(x,t) \qquad \text{et} \qquad i_\Gamma = \Gamma\,\mathrm{d}x\,\frac{\partial u}{\partial t}(x+\mathrm{d}x,t) \approx \Gamma\,\mathrm{d}x\,\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \qquad \text{au premier ordre en } \mathrm{d}x.$$

La loi des mailles appliquée à la seule maille du circuit s'écrit

$$u(x,t) = u_\Lambda + u(x+\mathrm{d}x,t) \qquad \text{soit} \qquad u(x+\mathrm{d}x,t) - u(x,t) = -u_\Lambda = -\Lambda\,\mathrm{d}x\,\frac{\partial i}{\partial t} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda\,\frac{\partial i}{\partial t}} \quad (1)$$

La loi des nœuds appliquée au nœud du haut s'écrit quant à elle

$$i(x,t) = i(x+\mathrm{d}x,t) + i_\Gamma \qquad \text{soit} \qquad i(x+\mathrm{d}x,t) - i(x,t) = -i_\Gamma = -\Gamma\,\mathrm{d}x\,\frac{\partial u}{\partial t} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma\,\frac{\partial u}{\partial t}} \quad (2)$$

Les deux équations (1) et (2) couplent les deux ondes u et i. On découple ces équations en calculant par exemple

$$\frac{\partial(1)}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial(2)}{\partial t}$$

qui conduisent à

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\Lambda\,\frac{\partial^2 i}{\partial x\,\partial t} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 i}{\partial t\,\partial x} = -\Gamma\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Par théorème de Schwarz, les dérivées croisées sont égales d'où

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Lambda\,\Gamma\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0} \quad (*)$$

On reconnait une **équation de d'Alembert** caractéristique d'un phénomène de propagation à la célérité

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda\,\Gamma}}}$$

Pour enfin obtenir la relation de dispersion vérifiée par les ondes de tension et de courant le long du câble, il nous faut considérer une OPPH

$$\underline{u} = \underline{u}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega\,t - k\,x)}$$

et regarder quelle est la condition sur ω et k pour qu'une telle onde soit solution de l'équation d'onde $(*)$. En rappelant qu'avec notre convention de signe pour la notation complexe, on a

$$\frac{\partial}{\partial x} \leftrightarrow -\mathrm{j}\,k \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow \mathrm{j}\,\omega$$

on trouve facilement qu'il faut

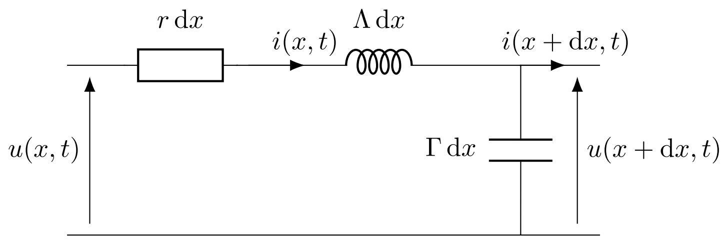
$$\boxed{\omega^2 = c^2\,k^2 \qquad \text{soit} \qquad k = \pm\,\frac{\omega}{c}}$$

C'est la **relation de dispersion** des ondes le long du câble coaxial idéal.

1.2 Un second exemple : le câble coaxial avec résistance

Dans l'exemple précédent sur le câble coaxial idéal, nous trouvons une relation de dispersion particulièrement simple (la plus simple possible en fait). C'est loin d'être le cas général ! Considérons un deuxième exemple un tout petit peu plus compliqué.

On étudie toujours une onde de tension qui se propage dans un câble coaxial. Le câble est maintenant caractérisé par une inductance par unité de longueur Λ, par une capacité linéïque Γ et aussi par une résistance par unité de longueur r. On en modélise une portion de longueur $\mathrm{d}x$ par le circuit électrocinétique suivant :



Avec les mêmes notations que précédemment, et en écrivant u_r la tension aux bornes de la résistance, l'application de la loi des mailles pour ce circuit conduit à

$$u(x,t) = u_r + u_\Lambda + u(x+\mathrm{d}x,t)$$

soit

$$u(x+\mathrm{d}x,t) - u(x,t) = -u_\Lambda - u_r = -\Lambda\,\mathrm{d}x\,\frac{\partial i}{\partial t} - r\,i(x,t)\,\mathrm{d}x \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda\,\frac{\partial i}{\partial t} - r\,i} \quad (1)$$

Quant à la loi des noeuds, elle ne change pas. On a toujours

$$\boxed{\frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma\,\frac{\partial u}{\partial t}} \quad (2)$$

Calculons alors

$$\frac{\partial(1)}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial(2)}{\partial t}$$

qui conduisent à

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\Lambda\,\frac{\partial^2 i}{\partial x\,\partial t} - r\,\frac{\partial i}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 i}{\partial t\,\partial x} = -\Gamma\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Par théorème de Schwarz, les dérivées croisées sont égales d'où

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Lambda\,\Gamma\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - r\,\frac{\partial i}{\partial x}$$

puis en utilisant l'équation (2), on conclut

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Lambda\,\Gamma\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - r\,\Gamma\,\frac{\partial u}{\partial t} = 0}$$

C'est l'équation d'onde dans le câble coaxial avec résistance, et ce n'est pas une équation de d'Alembert ! Déterminons la relation de dispersion de cette équation en utilisant l'OPPH $\underline{u} = \underline{u}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega\,t - k\,x)}$:

$$-k^2 + \Lambda\,\Gamma\,\omega^2 - \mathrm{j}\,r\,\Gamma\,\omega = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{k^2 = \Lambda\,\Gamma\,\omega^2 - \mathrm{j}\,r\,\Gamma\,\omega}$$

Rappelons que la pulsation ω est toujours réelle et positive. On en déduit que k^2 est complexe, donc k également ! On le note désormais $\underline{k}$ pour cette raison. Exprimons-le.

Racine d'un nombre complexe. Attention à ne jamais écrire

$$\sqrt{a + \mathrm{j}\,b}$$

Personne ne fait ça. Le symbole $\sqrt{a}$ est utilisé pour a réèl et positif seulement. Plutôt,

- si le carré est écrit en notation exponentielle

$$\underline{k}^2 = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\theta} \qquad \text{alors} \qquad \underline{k} = \pm\sqrt{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\theta\,/\,2}$$

- et si le carré n'est pas écrit en notation exponentielle, alors on écrit plutôt

$$\underline{k}^2 = a + \mathrm{j}\,b \qquad \Rightarrow \qquad \underline{k} = \pm(a + \mathrm{j}\,b)^{1/2}$$

et parfois on peut progresser si la partie imaginaire b est petite devant la partie réelle a. Dans ce cas

$$\underline{k} = \pm\sqrt{a}\,\left(1 + \mathrm{j}\,\frac{b}{a}\right)^{1/2} \approx \pm\sqrt{a}\,\left(1 + \mathrm{j}\,\frac{b}{2\,a}\right)$$

par un développement limité.

Revenons après cette entracte à notre nouvelle relation de dispersion. Écrivons pour cela $\underline{k} = k_r + \mathrm{j}\,k_i$ où k_r et k_i sont les parties réelles et imaginaires de $\underline{k}$ respectivement. On a alors

$$(k_r + \mathrm{j}\,k_i)^2 = \Lambda\,\Gamma\,\omega^2 - \mathrm{j}\,r\,\Gamma\,\omega \qquad \text{soit} \qquad k_r^2 - k_i^2 + 2\,\mathrm{j}\,k_r\,k_i = \Lambda\,\Gamma\,\omega^2 - \mathrm{j}\,r\,\Gamma\,\omega$$

En identifiant les parties réelle et imaginaire de cette équation, on obtient

$$\left\{\begin{array}{rcl} k_r^2 - k_i^2 & = & \Lambda\,\Gamma\,\omega^2 \\ 2\,k_r\,k_i & = & r\,\Gamma\,\omega \end{array}\right.$$

soit d'après la seconde équation $k_i = r\,\Gamma\,\omega\,/\,(2\,k_r)$, d'où en utilisant la première,

$$k_r^2 - \frac{r^2\,\Gamma^2\,\omega^2}{4\,k_r^2} = \Lambda\,\Gamma\,\omega^2$$

En multipliant par k_r^2, on obtient un polynôme du second ordre en k_r^2 :

$$k_r^4 - \Lambda\,\Gamma\,\omega^2\,k_r^2 - \frac{r^2\,\Gamma^2\,\omega^2}{4} = 0$$

dont les racines sont

$$k_r^2 = \frac{\Lambda\,\Gamma\,\omega^2}{2} \pm \frac{\sqrt{(\Lambda\,\Gamma\,\omega^2)^2 + r^2\,\Gamma^2\,\omega^2}}{2}$$

Puisque k_r^2 est évidemment positif (c'est un carré), on ne retient que la racine positive et donc

$$k_r = \pm\sqrt{\frac{\Lambda\,\Gamma\,\omega^2}{2} + \frac{\sqrt{(\Lambda\,\Gamma\,\omega^2)^2 + r^2\,\Gamma^2\,\omega^2}}{2}}$$

puis $k_i = r\,\Gamma\,\omega\,/\,(2\,k_r)$ donc

$$k_i = \pm\frac{r\,\Gamma\,\omega}{2\sqrt{\dfrac{\Lambda\,\Gamma\,\omega^2}{2} + \dfrac{\sqrt{(\Lambda\,\Gamma\,\omega^2)^2 + r^2\,\Gamma^2\,\omega^2}}{2}}}$$

d'où la relation de dispersion pour le câble coaxial avec résistance, un peu plus riche que la précédente,

$$\underline{k} = \pm\left(\sqrt{\frac{\Lambda\,\Gamma\,\omega^2}{2} + \frac{\sqrt{(\Lambda\,\Gamma\,\omega^2)^2 + r^2\,\Gamma^2\,\omega^2}}{2}} + \mathrm{j}\,\frac{r\,\Gamma\,\omega}{2\sqrt{\dfrac{\Lambda\,\Gamma\,\omega^2}{2} + \dfrac{\sqrt{(\Lambda\,\Gamma\,\omega^2)^2 + r^2\,\Gamma^2\,\omega^2}}{2}}}\right)$$

Notons que si $r = 0$, on retrouve $k = \pm\,\omega\,/\,c$ comme attendu. Une telle expression amène quelques commentaires :

Relation de dispersion. Voici quelques remarques à retenir de notre étude.
- toutes les ondes ne vérifient pas une équation de d'Alembert ;
- en conséquence, la relation $k = \omega\,/\,c$ n'est pas toujours valable ;
- une relation de dispersion peut être (très) compliquée.

Il nous faut apprendre quelles conséquences une relation de dispersion non triviale amène sur la propagation de l'onde. Cela est en fait assez simple : nous allons voir que
- la partie réelle de $\underline{k}$ renseigne sur la propagation de l'onde (phénomène de **dispersion**) ;
- et la partie imaginaire renseigne sur l'**absorption** de l'onde (perte d'énergie le long de la propagation).

Nous discutons ces deux éléments séparément pour plus de clarté.

2 Absorption d'une onde

Remarque. On rappelle que, même si nous notons une onde $\underline{u}$ dans tout ce chapitre, ce que nous discutons est complètement général et concerne toutes les ondes, quelque soit le domaine de la physique considéré, donc pas seulement l'onde de tension de la première partie du chapitre.

Dans cette partie, on s'intéresse seulement à l'absorption d'une onde. Pour cela, il est suffisant de considérer une OPPH en complexe

$$\underline{u} = \underline{u_0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(\omega\,t - \underline{k}\,x)} \qquad \text{avec} \qquad \underline{u_0} = u_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\varphi}$$

Commençons par séparer le vecteur d'onde en sa partie réelle et sa partie imaginaire. On note conventionnellement

$$\boxed{\underline{k} = k' - \mathrm{j}\,k'' \qquad \text{avec} \qquad k' = \mathfrak{Re}(\underline{k}) \qquad \text{et} \qquad k'' = -\mathfrak{Im}(\underline{k})}$$

de sorte que

$$\underline{u} = \underline{u_0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(\omega\,t - k'\,x + \mathrm{j}\,k''x)} = \underline{u_0}\,\mathrm{e}^{-k''\,x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(\omega\,t - k'\,x)}$$

Le signal physique étant $u = \mathfrak{Re}(\underline{u})$, on calcule aisément

$$u(x,t) = u_0\,\underbrace{\mathrm{e}^{-k''\,x}}_{\text{absorption}}\,\underbrace{\cos(\omega\,t - k'x + \varphi)}_{\text{propagation}}$$

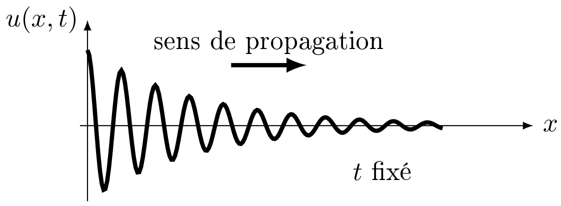
On reconnait alors dans le terme de propagation une OPPH réelle, mais son amplitude évolue avec x selon $u_0\,\mathrm{e}^{-k''\,x}$.

Ce n'est donc pas une « vraie » OPPH puisqu'elle n'est pas strictement progressive, mais comme elle l'est en complexe on continue de parler d'OPPH même en réel.

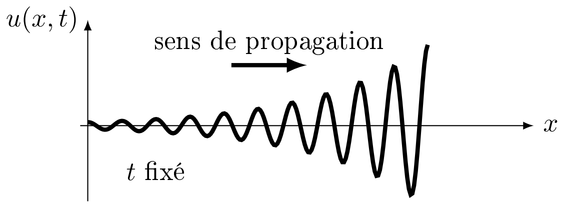
Si ensuite dans cette expression on considère $k' > 0$, alors l'onde se propage vers les x croissants, et par conséquent :
- si $k'' > 0$, l'onde est atténuée le long de la propagation ;
- si $k'' < 0$, l'onde est amplifiée le long de la propagation.

Ce deuxième cas n'est pas physique : une onde réelle n'est jamais amplifiée pendant sa propagation (sauf dans des conditions très particulières, nous en rencontrerons une dans le cours sur les LASER). De manière générale, une telle situation est donc à rejeter.

On peut dresser des schémas de ces situations.



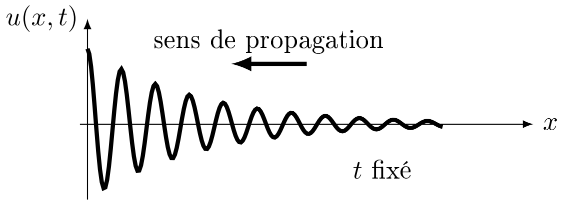
Atténuation de l'onde
($k' > 0$ et $k'' > 0$)



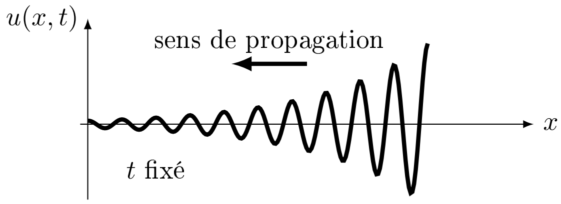
Amplification de l'onde
($k' > 0$ et $k'' < 0$)

Dans le cas où à l'inverse $k' < 0$, alors l'onde se propage vers les x décroissants et on constate que
- si $k'' < 0$, l'onde est atténuée le long de la propagation ;
- si $k'' > 0$, l'onde est amplifiée le long de la propagation.

En schéma :



Amplification de l'onde
($k' < 0$ et $k'' > 0$)



Atténuation de l'onde
($k' < 0$ et $k'' < 0$)

Par ailleurs, dans le cas d'une atténuation, puisque le facteur d'atténuation de l'onde est $\mathrm{e}^{-k''\,x}$, on comprend que l'onde est atténuée sur une distance typique δ telle que $\delta(\omega) = 1\,/\,|k''(\omega)|$.
On peut dès lors dresser un bilan des idées à retenir.

Bilan sur l'absorption d'une onde. À partir de la décomposition $\underline{k} = k' - \mathrm{j}\,k''$, on obtient pour une OPPH

$$u(x,t) = u_0\,\mathrm{e}^{-k''\,x}\,\cos(\omega\,t - k'\,x + \varphi)$$

On commente alors que :

- si $k'' = 0$, donc **si $\underline{k}$ est purement réel**, l'onde n'est **pas absorbée** lors de sa propagation ;
- si $k'' \neq 0$, il convient de regarder les signes de k' et k'' pour conclure si l'onde est atténuée, ou bien amplifiée le long de sa propagation ;
- si l'onde est amplifiée lors de sa propagation, il faut généralement conclure qu'une telle solution n'est pas physique (sauf cas très particulier, dans les LASER par exemple) ;
- si l'onde est atténuée, la **distance typique d'atténuation** est

$$\boxed{\delta(\omega) = \frac{1}{|k''(\omega)|}} \qquad \text{(en m)}$$

Enfin, mentionnons qu'une onde peut être atténuée (au sens d'une diminution de son amplitude) également par le phénomène de dispersion. Le phénomène d'absorption s'en distingue du fait que l'atténuation résultante provient d'une **perte d'énergie** de l'onde, ce qui n'est pas le cas lors d'une dispersion.

Mentionnons également que l'onde $u(x,t) = u_0\,\mathrm{e}^{-k''\,x}\,\cos(\omega\,t - k'\,x + \varphi)$ **n'est pas une OPPH** car elle n'est pas strictement progressive, mais que sa notation complexe $\underline{u}(x,t) = \underline{u_0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(\omega\,t - \underline{k}\,x)}$ l'est, et pour cette raison nous continuons de parler d'OPPH.

3 Dispersion d'une onde

Le phénomène de dispersion est un peu plus subtil que celui d'absorption. Notamment, il nécessite pour être compris de considérer une onde réelle.

Rappel. Une OPPH n'est pas physique. Rappelons qu'une OPPH $A\cos(\omega t - k x)$
- existe à tout instant, de $t \to -\infty$ à $t \to +\infty$;
- existe partout, de $x \to -\infty$ à $x \to +\infty$;
- porte une énergie infinie.

Aucune de ces propriétés n'est physiquement possible. Une telle onde n'existe donc pas. Nous nous intéressons aux OPPH uniquement parce qu'elles constituent une base des solutions des équations d'onde linéaires.

C'est l'intérêt des OPPH : n'importe quelle onde physique $\underline{u}(x,t)$ se décompose sur la base des OPPH. Quelque soit $\underline{u}$, on peut ainsi toujours écrire

$$\underline{u}(x,t) = \int \mathrm{d}\omega \, \underline{u}_\omega \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(\omega t - \underline{k}\, x)}$$

Dans cette expression, $\underline{u}_\omega$ représente le « poids » de l'OPPH à ω dans la décomposition de $\underline{u}$. Mathématiquement, la fonction $\omega \mapsto \underline{u}_\omega(\omega)$ est appelée **la transformée de Fourier** de $\underline{u}$, et plus physiquement, on parle de la **densité spectrale** de $\underline{u}$.

Il faut vraiment comprendre la formule précédente comme

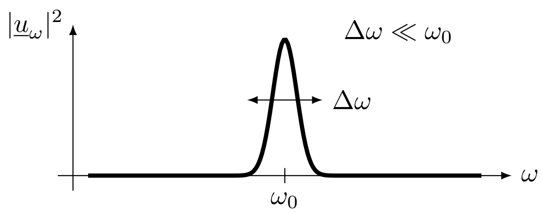
$$u = \sum_{i=0}^{n} u_i \, \mathrm{e}_i$$

des cours de mathématiques sur les espaces vectoriels. Sauf qu'ici on somme sur une variable continue ω, et que les vecteurs de la base e_i sont les OPPH $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(\omega t - \underline{k}\, x)}$.

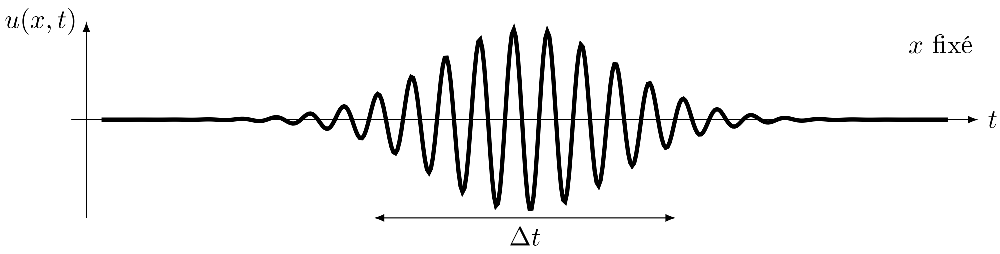
Cette densité spectrale $\underline{u}_\omega(\omega)$ peut se déterminer par le calcul connaissant $\underline{u}$, mais nous n'en aurons jamais besoin et ce n'est pas au programme.

3.1 Notion de paquet d'ondes

Définition. Paquet d'onde. On appelle paquet d'onde une onde dont la densité spectrale est « fine » au sens où la largeur spectrale $\Delta\omega$ est petite devant la valeur moyenne ω_0.



En d'autres termes, $\underline{u}_\omega$ prend des valeurs significatives seulement au voisinage immédiat d'une pulsation ω_0. La représentation spatiale d'un paquet d'onde à x fixé ressemble à



L'oscillation qu'on observe a une période caractéristique de l'ordre de $T \approx 2\pi / \omega_0$, et une durée typique Δt telle que $\Delta t \sim 1 / \Delta\omega$ en ordre de grandeur.

Car rappelons qu'en vertu d'une propriété de la transformée de Fourier, on a $\Delta\omega \, \Delta t \approx 1$, voir le cours OP2.

3.2 Propagation d'un paquet d'onde

Étudions la propagation d'un paquet d'onde en deux temps. ► Commençons par un paquet d'onde vérifiant l'équation d'onde de l'équation de d'Alembert, $\underline{k} = \omega / c$. On peut alors calculer

$$\underline{u} = \int \mathrm{d}\omega \, \underline{u}_\omega \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(\omega t - \underline{k}\, x)} = \int \mathrm{d}\omega \, \underline{u}_\omega \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega\,(t - x / c)} = \mathcal{F}\left(t - \frac{x}{c}\right) \qquad \text{si on définit} \qquad \mathcal{F} : X \mapsto \int \mathrm{d}\omega \, \underline{u}_\omega \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega X}$$

Dans ce cas, $\underline{u}$ est une fonction purement progressive (c'est-à-dire une fonction de $t - x\,/\,c$ uniquement). La propagation se fait sans aucune distorsion, l'onde se propage sans se déformer.

► Étudions maintenant la propagation d'un paquet d'onde qui vérifie une relation de dispersion $\underline{k} = k'(\omega)$ (sous-entendu : la relation $k'(\omega)$ est quelconque mais on considère $\underline{k}$ réèl).

Si $\underline{k}$ a une partie imaginaire cela conduit à de l'absorption, comme nous l'avons vu précédemment en partie 2. Mais pour plus de clarté nous étudions séparément absorption et dispersion donc dans cette partie sur la dispersion nous éludons les cas où $\underline{k}$ aurait une partie imaginaire.

On peut alors calculer cette fois :

$$\underline{u} = \int \mathrm{d}\omega\, \underline{u}_\omega\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(\omega\, t - \underline{k}\, x)} = \int \mathrm{d}\omega\, \underline{u}_\omega\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(\omega\, t - k'(\omega)\, x)}$$

et on ne peut plus faire apparaître une fonction de $t - x\,/\,c$ comme précédemment...

C'est là qu'intervient l'hypothèse du paquet d'onde : les pulsations sur lesquelles on intègre effectivemment sont toutes très proches d'une pulsation moyenne ω_0 ($\underline{u}_\omega$ est nul pour ω loin de ω_0). On a donc pour tout ω intervenant dans l'intégrale

$$|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$$

et cela va nous permettre de justifier un développement limité. On écrit

$$k'(\omega) \approx k'(\omega_0) + (\omega - \omega_0)\,\frac{\mathrm{d}k'}{\mathrm{d}\omega}(\omega_0)$$

à l'ordre 1 en $\omega - \omega_0$. Par ailleurs, en décomposant

$$\omega = \omega_0 + (\omega - \omega_0)$$

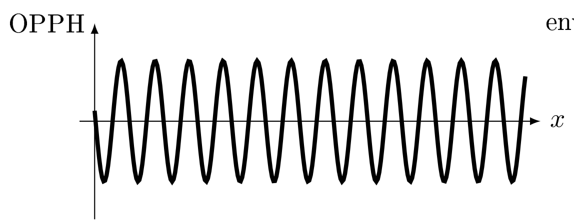
on peut avancer le calcul de $\underline{u}$. L'argument de l'exponentielle devient

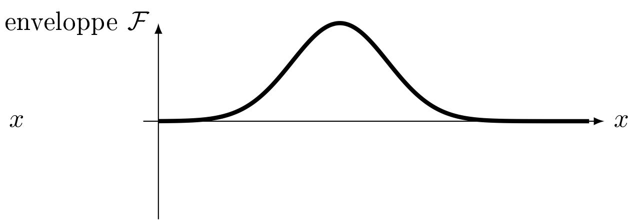
$$\begin{aligned} \omega\, t - k'(\omega)\, x \quad &\approx \quad \omega_0\, t - k'(\omega_0)\, x \;+\; (\omega - \omega_0)\, t + (\omega - \omega_0)\,\frac{\mathrm{d}k'}{\mathrm{d}\omega}(\omega_0)\, x \\ &= \quad \omega_0\, t - k'(\omega_0)\, x \;+\; (\omega - \omega_0)\left(t - \frac{\mathrm{d}k'(\omega_0)}{\mathrm{d}\omega}\, x\right) \end{aligned}$$

Dès lors, on peut ré-écrire $\underline{u}$ comme

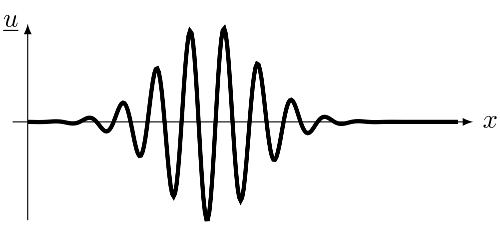
$$\begin{aligned} \underline{u} \quad &= \quad \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(\omega_0\, t - k'(\omega_0)\, x)} \int \mathrm{d}\omega\, \underline{u}_\omega\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(\omega - \omega_0)\,(t - \mathrm{d}k'(\omega_0)\,/\,\mathrm{d}\omega\, x)} \\ &= \quad \underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(\omega_0\, t - k'(\omega_0)\, x)}}_{\text{OPPH à } \omega_0}\, \underbrace{\mathcal{F}(t - \mathrm{d}k'(\omega_0)\,/\,\mathrm{d}\omega\, x)}_{\text{enveloppe}} \qquad \text{où} \qquad \mathcal{F} : X \mapsto \int \mathrm{d}\omega\, \underline{u}_\omega\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(\omega - \omega_0)\, X} \end{aligned}$$

Ainsi, pour un paquet d'onde, $\underline{u}$ se réécrit comme le produit d'une OPPH « moyenne » à ω_0 et d'une enveloppe $\mathcal{F}$ qui est une onde purement progressive (donc qui se propage sans se déformer). À t fixé, on dessine





soit pour $\underline{u}$ = « OPPH × enveloppe » :



3.3 Vitesse de phase, vitesse de groupe et glissement de phase

Poursuivons en reprenant l'expression du paquet d'onde après développement limité,

$$\underline{u} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(\omega_0\, t - k'(\omega_0)\, x)}\; \mathcal{F}(t - \mathrm{d}k'(\omega_0)\,/\,\mathrm{d}\omega\, x)$$

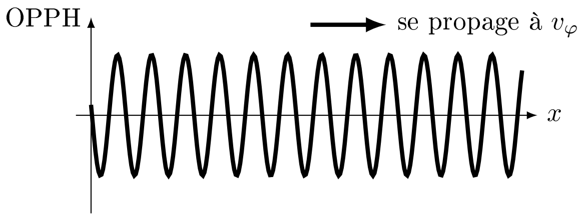
On voit sur cette expression que l'OPPH et l'enveloppe ne se propagent pas à la même vitesse.

Vitesse de phase et de groupe. Le paquet d'onde est donc le produit d'une OPPH moyenne et d'une enveloppe.

▶ **Vitesse de phase.** On appelle vitesse de phase la vitesse de l'OPPH moyenne

$$\boxed{v_\varphi = \frac{\omega_0}{k'(\omega_0)}}$$

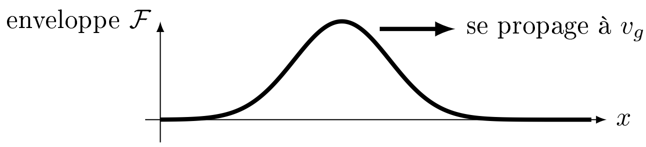
Par extension, on nomme vitesse de phase d'une OPPH sa vitesse de propagation, même si ce n'est pas l'OPPH moyenne d'un paquet d'onde.



▶ **Vitesse de groupe.** On appelle vitesse de groupe la vitesse de l'enveloppe progressive

$$\boxed{v_g = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}k'}{\mathrm{d}\omega}(\omega_0)} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k'}(\omega_0)}$$

La vitesse de groupe est la **vitesse de propagation du paquet d'onde**, mais aussi de l'énergie.



Ces définitions permettent d'écrire

$$\underline{u} = \underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega_0\,(t-x\,/\,v_\varphi)}}_{\text{se propage à } v_\varphi}\ \underbrace{\mathcal{F}(t-x\,/\,v_g)}_{\text{se propage à } v_g}$$

À priori, v_φ est différente de v_g donc l'enveloppe et l'OPPH moyenne ne voyagent pas à la même vitesse. Cela produit un **glissement de phase** : l'OPPH moyenne « avance » (ou recule) à l'intérieur de l'enveloppe. Voir animations.

3.4 Bilan sur la dispersion d'un paquet d'onde

À retenir :

— une OPPH n'est pas une onde réelle ;
— une onde réelle se décompose comme somme d'OPPH.

Dispersion d'une onde. Les OPPH qui constituent une onde réelle ne voyagent pas toutes à la même vitesse a priori (v_φ peut dépendre de leurs différentes pulsations ω).

Cela fait que des OPPH « prennent de l'avance » (ou du retard) sur les autres : l'onde s'étale et se déforme au cours de la propagation.

Pensez à un peloton de course à pieds : les plus rapides prennent de l'avance et le groupe de coureurs s'étale au fur et à mesure de la course.

C'est cette propriété qu'on appelle **dispersion** : le paquet d'onde se déforme car les OPPH qui le constituent ne voyagent pas toutes à la même vitesse.

Conclusion. Lorsque

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'}$$

dépend de ω, alors on dit qu'il y a dispersion, ou que l'onde est dispersive, ou que le milieu est dispersif, ou que la propagation est dispersive.

Ensuite, la déformation d'une onde par dispersion est délicate à décrire. En étudiant un paquet d'onde et en développant la relation de dispersion à l'ordre 1, on a montré plusieurs résultats qu'on retiendra :

Dispersion d'un paquet d'onde à l'ordre 1.

- un paquet d'onde est une somme de plein d'OPPH de pulsations proches de ω_0 ;
- on fait le développement limité de la relation de dispersion autour de ω_0 :

$$k'(\omega) \approx k'(\omega_0) + (\omega - \omega_0)\frac{\mathrm{d}k'}{\mathrm{d}\omega}(\omega_0)$$

- on montre que le paquet d'onde est alors le produit d'une OPPH moyenne et d'une enveloppe progressive ;
- l'enveloppe voyage à la vitesse de groupe

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k'}(\omega_0)$$

- l'OPPH moyenne voyage a priori à une vitesse différente v_φ : il y a un **glissement de phase**.

Si on devait pousser le développement limité à des ordres supérieurs, on montrerait que le paquet d'onde s'étale au fur et à mesure de la propagation. Le calcul est hors-programme mais on observera cela lors d'un TP numérique avec `python`.

4 Bilan général : absorption et dispersion d'une onde