H2-Cours

Dynamique des fluides visqueux newtoniens en écoulement incompressible

Objectif. Écrire l'équation de la dynamique pour un fluide visqueux newtonien, discuter sa complexité et comparer deux de ses termes (convection et viscosité) pour préciser l'aspect laminaire ou turbulent d'un écoulement.

Notions. Contraintes tangentielles dans un fluide newtonien, équivalent volumique des forces de viscosité, équation de Navier-Stokes, nombre de Reynolds, force de trainée en fonction du nombre de Reynolds.

Table des matières

1 Actions de contact dans un fluide

Pour passer de la cinématique à la dynamique, il faut préciser les forces qui agissent sur les particules de fluide. On en distingue deux types :

- les forces volumiques ;
- les forces surfaciques.

Les forces volumiques comprennent essentiellement le poids *(d'autres exemples sont la force de Lorentz si le fluide est chargé électriquement, les forces d'inertie d'entraînement si le référentiel est non galiléen, etc)*. Pour les forces surfaciques, on distingue les forces **normales** (ou de pression) et les forces **tangentielles**.

1.1 Les forces de pression (contraintes normales)

On rappelle que la force de pression sur une surface S fermée orientée (par son contour) est

$$\overrightarrow{F_P} = \iint_S P \,\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

Équivalent volumique des forces de pression. On montre (voir H0) que la résultante des forces de pression sur la surface entourant un élément de volume infinitésimal $\mathrm{d}V$ peut s'écrire

$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{F_P} = \overrightarrow{f_P}\,\mathrm{d}V \qquad \text{avec} \qquad \overrightarrow{f_P} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P}$$

$\overrightarrow{f_P}$ est appelé équivalent volumique des forces de pression (en $\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-3}$).

Cas statique : L'équation de la statique des fluides est alors (c'est « somme des forces = 0 »)

$$-\overrightarrow{\text{grad}}\,P \;+ \overrightarrow{f_{\text{ext}}} = \vec{0}$$

avec $\overrightarrow{f_{\text{ext}}}$ les forces volumiques extérieures au fluide et $-\overrightarrow{\text{grad}}\,P$ les forces de pression volumiques.

1.2 Les contraintes tangentielles

Définition. En physique, on appelle **contrainte** une force par unité de surface (c'est donc une grandeur homogène à une pression, en pascals Pa ou $\mathrm{N \cdot m^{-2}}$).

Loi de Newton pour les contraintes tangentielles dans un fluide visqueux.

Lorsque le fluide est en mouvement, les particules de fluides « frottent » les unes sur les autres. Ces forces peuvent être très délicates à décrire pour des fluides compliqués.

Nous n'étudions que le cas des **fluides newtoniens**. Pour ces derniers, et pour un champ de vitesse $\vec{v} = v(y)\,\overrightarrow{e_x}$, la contrainte tangentielle s'exerçant sur une particule de fluide s'écrit

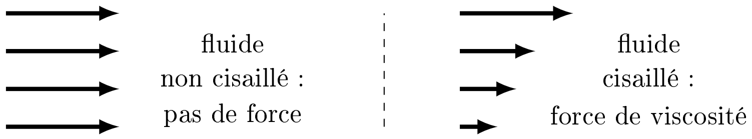
$$\boxed{\vec{\tau} = \eta\,\frac{\partial v(y)}{\partial y}\,\overrightarrow{e_x}} \qquad \text{(Loi de Newton)}$$

Cette loi est « la plus simple possible », au sens où elle propose une simple proportionnalité entre les causes (le cisaillement $\partial v(y)\,/\,\partial y$) et la conséquence (la contrainte τ). La constante de proportionnalité est appelée **viscosité dynamique** η, en $\mathrm{Pa \cdot s}$, ou en Pl (pour Poiseuille). On a $1\ \mathrm{Pa \cdot s} = 1$ Pl.

La force qui s'exerce sur une surface élémentaire dS est alors

$$\mathrm{d}\vec{F} = \vec{\tau}\,\mathrm{d}S = \eta\,\frac{\partial v(y)}{\partial y}\,\mathrm{d}S\,\overrightarrow{e_x}$$

Remarque 1. C'est la différence de vitesse entre deux particules voisines qui provoque le frottement : si la particule du haut va plus vite que la particule du bas, elle « entraîne » cette dernière par viscosité. C'est pour cette raison que la force proposée dépend du **taux de cisaillement** $\partial v(y)\,/\,\partial y$, c'est-à-dire de la variation spatiale du champ de vitesse, et pas de la vitesse directement. Dans un écoulement où le champ de vitesse est constant, il n'y a pas de force de viscosité.



Remarque 2. Il existe toute une zoologie de fluides : mousses à raser, peintures, encres, mélange eau-maïzena,... Ces exemples sont tous des fluides non-newtoniens. En général par contre, les fluides composés de molécules simples (eau, air,...) sont des fluides newtoniens. La plupart des huiles, mais aussi le miel, peuvent également être décrits par le modèle du fluide newtonien. Ils ont tous les deux la caractéristique d'avoir des valeurs de viscosité élevées.

On donne quelques valeurs typiques pour la viscosité :

	air (CNTP)	eau	huile	miel
η (Pa·s)	$1{,}8 \times 10^{-5}$	$1{,}0 \times 10^{-3}$	1	10

Équivalent volumique des forces de viscosité (pour un écoulement incompressible).

Sur une particule de fluide de volume dV, on peut montrer que les contraintes tangentielles peuvent se réécrire comme une force volumique ($\propto \mathrm{d}V$).

$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{F_T} = \overrightarrow{f_T}\,\mathrm{d}V \qquad \text{avec} \qquad \overrightarrow{f_T} = \eta\,\Delta\vec{v}}$$

où $\Delta\vec{v}$ est le **laplacien (vectoriel)** de la vitesse. Le laplacien vectoriel est un nouvel opérateur différentiel. Il faut connaître son expression dans le système de coordonnées cartésien (voir formulaire).

Calcul 1 - Démonstration pour $v(y)\,\overrightarrow{e_x}$

Remarque. Si l'écoulement n'est pas incompressible, il y a des termes en plus qui sont de nature plus subtile...

2 Équation de Navier-Stokes

On connait maintenant les forces qui agissent sur une particule de fluide : les forces volumiques, les forces surfaciques normales (la pression) et les forces surfaciques tangentielles (la viscosité). Il s'agit maintenant d'appliquer le théorème du centre de masse à une particule de fluide, pour obtenir l'équation de la dynamique de celle-ci.

2.1 Équation

Équation de Navier-Stokes (1845). Pour un fluide newtonien en écoulement incompressible, on a

$$\boxed{\varrho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}\right)=-\overrightarrow{\text{grad}}\,P+\eta\,\Delta\vec{v}+\overrightarrow{f_{\text{ext}}}}$$

C'est « masse $\times$ accélération = somme des forces » en volumique, c'est-à-dire

« masse volumique $\times$ accélération = somme des forces volumiques »

Souvent, les forces volumiques se résument au poids donc $\overrightarrow{f_{\text{ext}}}=\varrho\,\vec{g}$. L'équation de Navier-Stokes est valable seulement pour un fluide incompressible (car l'équivalent volumique des forces de viscosité $\eta\,\Delta\vec{v}$ ne tient que dans ce cas) donc elle est toujours associée à $\text{div}\,\vec{v}=0$.

Remarques : Toute la mécanique des fluides visqueux en écoulement incompressible est comprise dedans : torrent, miel, vents et météorologie, vagues, courants marins, tsunamis, turbulence, portance et trainée des avions ou des voitures,... L'équation de Navier-Stokes est non-linéaire (à cause du terme de convection), donc très difficile à résoudre. Il n'existe que très peu de configurations pour lesquelles il y a une solution explicite (c'est-à-dire analytique). Dans les autres cas, les ingénieurs de l'aéronautique, ou de l'hydrodynamique, ou de la météorologie, utilisent des programmes informatiques très sophistiqués pour en déterminer numériquement des solutions approchées.

Interprétation de l'équation de Navier-Stokes :

— l'accélération de la particule de fluide a deux causes différentes, à savoir le terme local instationnaire et le terme convectif ;

— il y a une compétition entre deux termes : le terme convectif non-linéaire $\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}$ d'une part et le terme de viscosité (dit « diffusif ») linéaire $\eta\,\Delta\vec{v}$ de l'autre.

— dans le cas où le terme convectif est nul ou négligeable, que la pression est homogène $\overrightarrow{\text{grad}}\,P=\vec{0}$ et qu'il n'y a pas de forces extérieures ; on a

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=\nu\,\Delta\vec{v}\qquad\text{avec}\qquad\nu=\frac{\eta}{\varrho}$$

qui est une **équation de diffusion** (une des grandes classes d'équation aux dérivées partielles de la physique : on les rencontrera plus tard dans l'année). ν est appelée **viscosité cinématique**, c'est un coefficient de diffusion. Il s'exprime en $\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$.

En pratique : Très souvent, P et $\vec{v}$ sont les $1+3=4$ inconnues (ϱ se déduit de P par une équation d'état thermodynamique). L'équation de Navier-Stokes (vectorielle) et l'équation de la conservation de la masse (scalaire) fournissent 4 équations qui permettent de résoudre les exercices. Il faut donc en pratique ne pas oublier d'utiliser la conservation de la masse.

2.2 Conditions aux limites

Conditions aux limites à l'interface entre deux milieux 1 et 2 :

- ▶ si l'interface est libre et plane, il y a continuité de la pression $\boxed{P_1=P_2}$;
- *(▶ si l'interface est libre et courbe, il faut tenir compte de la tension de surface dans la continuité de la pression $P_1=P_2+\frac{\gamma}{R}$ (si le centre de courbure est dans le milieu 1), avec R le rayon de courbure de l'interface. On discutera la tension de surface un peu plus en TP.)*
- ▶ si le fluide est visqueux il y a continuité de la vitesse $\boxed{\vec{v_1}=\vec{v_2}}$.
- ▶ si le fluide est parfait (voir H3) il y a seulement continuité de la vitesse normale à la paroi $v_{\perp,1}=v_{\perp,2}$ (le fluide peut « glisser » sur la paroi, contrairement à un fluide visqueux) ;

Ayant donné l'équation de la dynamique et les conditions aux limites, on peut chercher à calculer le champ de vitesse dans deux cas où c'est possible : pour l'écoulement de Couette et pour l'écoulement de Poiseuille.

2.3 Écoulement de Couette

C'est un écoulement forcé par la mise en mouvement d'un bord du récipient.

Calcul 2 - Écoulement de Couette en cartésien

2.4 Écoulement de Poiseuille

C'est un écoulement forcé par une différence de pression. On peut y définir une **résistance hydraulique** par analogie avec la résistance électrique et la résistance thermique.

Calcul 3 - Écoulement de Poiseuille en cylindrique

3 Nombre de Reynolds

3.1 Analyse en ordres de grandeur et nombre de Reynolds

L'équation de Navier-Stokes est impossible à résoudre dans la plupart des cas. On cherche donc à la **simplifier**, en utilisant pour cela un **raisonnement en ordre de grandeur**. Ce dernier permet d'identifier si certains termes de l'équation sont négligeables devant d'autres, et de les supprimer le cas échéant.

Si L est une échelle spatiale typique, T, une échelle temporelle typique, V une vitesse typique, on peut alors comparer les termes convectif et diffusif de l'équation de Navier-Stokes comme suit :

$$\eta\,\Delta\vec{v} \sim \frac{\eta\,V}{L^2} \qquad \text{et} \qquad \varrho\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v} \sim \frac{\varrho\,V^2}{L} \qquad \text{donc} \qquad \frac{\varrho\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v}}{\eta\,\Delta\vec{v}} \sim \frac{\varrho\,V\,L}{\eta} \qquad \text{(en OdG)}$$

et on peut négliger un terme devant l'autre si $\dfrac{\varrho\,V\,L}{\eta} \ll 1$ ou $\dfrac{\varrho\,V\,L}{\eta} \gg 1$ (leur rapport est très différent de 1).

Nombre de Reynolds. On appelle nombre de Reynolds $\mathcal{R}_\mathrm{e}$ le nombre sans dimension

$$\boxed{\mathcal{R}_\mathrm{e} = \frac{\varrho\,V\,L}{\eta}}$$

Il rend compte de la compétition entre le terme convectif $\varrho\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v}$ et le terme diffusif $\eta\,\Delta\,\vec{v}$.

3.2 Écoulement à grand Reynolds

À grand nombre de Reynolds $\mathcal{R}_\mathrm{e} \gg 1$, le terme convectif est très grand devant le terme diffusif. Plus pragmatiquement, c'est le régime des grandes vitesses V et des grandes échelles spatiales L, ainsi que des faibles viscosités η. C'est donc typiquement le cas :

— de l'aéronautique,
— de l'aérodynamique des voitures,
— de la météo,
— de la natation, etc.

Le régime des grands Reynolds correspond à des régimes **turbulents**. On retiendra la valeur arbitraire de 2000 communément admise : si $\mathcal{R}_\mathrm{e} > 2000$ l'écoulement est turbulent.

Remarque : On peut parfois considérer dans ce cas que le terme de diffusion de l'équation de Navier-Stokes est négligeable devant les autres, ou de manière équivalente on peut considérer la viscosité nulle : on parle dans ce cas d'**écoulement parfait** (la dynamique est alors régie par l'équation d'Euler, voir chapitre H3). MAIS, même à grand Reynolds, la viscosité continue de jouer un rôle si il y a un obstacle dans l'écoulement (voir la partie sur la couche limite), contrairement au modèle du fluide parfait (H3).

3.3 Écoulement à faible Reynolds

À petit nombre de Reynolds $\mathcal{R}_e \ll 1$, le terme convectif est très petit devant le terme diffusif. Plus pragmatiquement, c'est le régime des petites vitesses V et des petites échelles spatiales L, ainsi que des fortes viscosités η. C'est donc typiquement le cas :
- des écoulements de fluides très visqueux (miel),
- des écoulements dans des capillaires fins (vaisseaux sanguins),
- des écoulements lents (glaciers), etc.

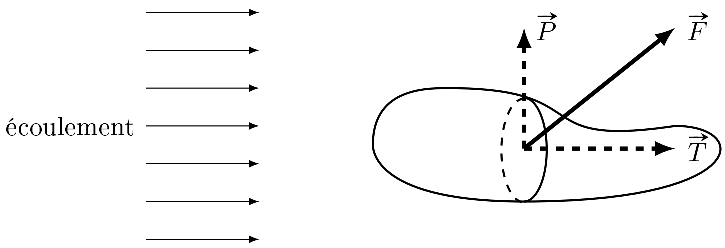
Il correspond à des régimes **laminaires**. On retiendra la valeur arbitraire de 2000 communément admise : si $\mathcal{R}_e < 2000$ l'écoulement est laminaire.

Remarque : On peut considérer dans ce cas que le terme de convection de l'équation de Navier-Stokes est négligeable devant les autres : l'équation devient alors **linéaire**, et prend en particulier la forme d'une équation de diffusion si le terme de pression est également nul.

4 Force de trainée

4.1 Définition

Lorsqu'un objet solide est plongé dans un fluide, et en mouvement par rapport à celui-ci, il subit une force exercée sur lui par le fluide. On distingue les deux composantes de cette force : celle normale à l'écoulement est appelée **portance** $\vec{P}$ (elle explique le vol des oiseaux et des avions). Celle dans le sens de l'écoulement est appelée **trainée** $\vec{T}$.



Coefficient de trainée. La trainée va dépendre de plusieurs paramètres qu'on peut facilement identifier : la vitesse du fluide V par rapport à l'objet bien sûr, mais aussi sa masse volumique ϱ, ainsi que la section de l'objet S. Par analyse dimensionnelle, on peut construire une force par (le 1/2 est conventionnel) avec

$$\boxed{F_x = \frac{1}{2} C_x \, \varrho \, S \, V^2}$$

Le **coefficient de trainée (sans dimension)** C_x regroupe les dépendances plus subtiles : par exemple la viscosité, mais aussi d'autres phénomènes (voir la partie sur la couche limite). On retiendra que le coefficient de trainée **ne dépend que du Reynolds** (c'est-à-dire de ϱ, L, V et η, mais seulement via la combinaison $\varrho \, L \, V \, / \, \eta$), ainsi que **du rapport d'aspect de l'objet** (c'est-à-dire sa forme : sphérique, plan,...).

4.2 Régimes à faible et à fort nombre de Reynolds

À faible Reynolds. Dans ce cas, l'écoulement autour de l'objet est laminaire, et c'est la viscosité η qui intervient principalement dans C_x. On peut calculer que C_x décroit quand la viscosité diminue donc quand $\mathcal{R}_e$ augmente selon

$$\boxed{C_x \propto 1/\mathcal{R}_e \qquad \text{soit} \qquad \vec{F} \propto -\eta \, \vec{V}} \qquad \text{(loi de frottement \textbf{linéaire} en la vitesse)}$$

Exemple : si l'objet est sphérique de rayon R, la force s'écrit $\vec{F} = -6 \, \pi \, \eta \, R \, \vec{v}$ (appelée force de Stokes).

À fort Reynolds. Dans ce cas, l'écoulement en aval de l'objet est turbulent. Sur une large gamme de Reynolds,

$$\boxed{C_x = \text{cste} \qquad \text{soit} \qquad \vec{F} \propto -\varrho \, V \, \vec{V}} \qquad \text{(loi de frottement \textbf{quadratique} en la vitesse)}$$

On observe cependant une diminution brutale de C_x autour de $\mathcal{R}_e \approx 10^5$: on parle de **crise de trainée** ; avant une remontée puis de nouveau un régime indépendant du Reynolds.

4.3 Notion de couche limite

Paradoxe de d'Alembert. À grand Reynolds, la viscosité est négligeable et l'écoulement peut être considéré parfait, c'est-à-dire sans viscosité. Cependant, en travaillant l'équation de Navier-Stokes sans le terme de viscosité (appelée l'équation d'Euler), on peut calculer que la force exercée par le fluide sur l'objet est dans ce cas nulle ! C'est visiblement faux expérimentalement : par exemple ce sont les frottements de l'air qui impliquent de devoir payer l'essence pour faire avancer une voiture, ou à vélo il faut pédaler plus fort lorsqu'on a un vent de face...

Notion de couche limite. La trainée ne devient donc pas nulle à grand Reynolds. La solution à ce paradoxe réside dans la notion de **couche limite**. Au **voisinage immédiat de l'objet**, le fluide « frotte » sur lui, et **la viscosité ne peut pas être négligée**. Ainsi, il se développe autour de l'objet une couche dans laquelle la viscosité gouverne l'écoulement, alors que plus loin de l'objet elle n'a aucun rôle, du fait de l'écoulement à grand Reynolds.

4.4 Dépendance du coefficient de trainée en fonction du Reynolds

On retiendra seulement :

— à bas Reynolds, la viscosité gouverne l'écoulement : celui-ci est laminaire. Dans ce régime C_x diminue avec le Reynolds selon

$$C_x \propto \frac{1}{\mathcal{R}_\mathrm{e}}$$

— au fur et à mesure que le Reynolds augmente, les effets de la viscosité se confinent sur une petite couche autour de l'objet, dite **couche limite**. Loin de celle-ci, la viscosité est de moins en moins importante et l'écoulement est de moins en moins laminaire. Lorsque le Reynolds devient de l'ordre de 10^3, l'écoulement devient globalement turbulent et la couche limite se décolle de l'objet, créant un grand sillage à l'arrière de celui-ci. Dans ce cas
  - dans la couche limite, l'écoulement est gouverné par la viscosité, donc plutôt laminaire ;
  - mais le sillage est lui turbulent ;

— entre 10^3 et 10^5, la trainée n'évolue pas car le sillage non plus, on a

$$C_x = \text{Cste}$$

— au delà de 10^5, le Reynolds est si élevé que la couche limite elle-même devient turbulente : cela conduit à la récoller partiellement à l'objet et à diminuer le sillage, donc la trainée, on parle alors de **crise de la trainée**.