EM9-Cours

ARQS et milieux conducteurs

On discute dans ce chapitre une situation d'intérêt en électromagnétisme : les **régimes quasi-statiques**, qu'on appelle aussi les régimes lentement variables. On étudie ensuite l'électromagnétisme des milieux conducteurs dans ce régime (et on étudiera les milieux conducteurs hors ARQS dans le chapitre O8).

Table des matières

1 Approximation des régimes quasi-stationnaires (magnétique)

Avant de démarrer le chapitre, donnons la célérité des ondes électromagnétiques, qui nous est nécessaire.

Propriété. Propagation du champ électromagnétique (anticipation du chapitre O6).

Le champ électromagnétique est un objet qui se propage (il vérifie une équation de propagation). Dans le vide, son temps de propagation τ sur une distance d est

$$\tau = \frac{d}{c} \qquad \text{avec} \qquad \boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\,\varepsilon_0}} = 3{,}0 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

c est la **célérité de la lumière dans le vide**. Remarquons qu'elle vérifie $c^2\,\mu_0\,\varepsilon_0 = 1$. *(Voir appendice pour le calcul, ou attendre le chapitre O6.)*

L'approximation des régimes quasi-stationnaires consiste grossièrement à supposer que l'évolution des sources et des champs est « lente ». La question évidente est alors « lente devant quoi ? ». C'est ce que nous cherchons à préciser désormais.

1.1 Étude de l'équation de Maxwell-Ampère en ordre de grandeur

Afin d'introduire l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS), nous allons étudier l'équation de Maxwell-Ampère **en ordre de grandeur**. *C'est le même type de raisonnement que nous avions été amenés à tenir pour introduire le nombre de Reynolds en mécanique des fluides. Pour rappel, une analyse en ordre de grandeur de l'équation de Navier-Stokes nous avait permis de comprendre que le terme convectif $\varrho\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}$ pouvait être négligé à bas nombre de Reynolds.*

On considère pour cela une situation quelconque (ayons en tête par exemple un circuit électrique constitué de fils, d'un générateur de tension, de bobines, d'aimants, ...). Dans cette situation, on adopte les notations suivantes pour les ordres de grandeurs :

$$\begin{array}{llcl}
\text{pour le champ électrique} & ||\vec{E}|| & \sim & \mathcal{E} \\
\text{pour le champ électrique} & ||\vec{B}|| & \sim & \mathcal{B} \\
\text{une longueur typique} & & \sim & L \\
\text{un temps typique} & & \sim & T
\end{array}$$

T est le temps typique d'évolution des sources et des champs. Cherchons pour commencer à relier $\mathcal{E}$ à $\mathcal{B}$. On utilise pour cela l'équation de Maxwell-Faraday

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{d'où, en ordre de grandeur,} \qquad \frac{\mathcal{E}}{L} \sim \frac{\mathcal{B}}{T}$$

et donc

$$\boxed{\mathcal{E} \sim \frac{L}{T}\,\mathcal{B} \qquad \text{(d'après l'équation de Maxwell-Faraday)}}$$

Sachant cela, regardons maintenant l'équation de Maxwell-Ampère, où on utilise $c^2\,\mu_0\,\varepsilon_0 = 1$,

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{\jmath} + \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

et comparons en ordre de grandeur les deux termes

$$\left|\left|\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}\right|\right| \sim \frac{\mathcal{B}}{L} \qquad \text{et} \qquad \left|\left|\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right|\right| \sim \frac{1}{c^2}\,\frac{\mathcal{E}}{T}$$

Le rapport des deux donne

$$\frac{\left|\left|\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right|\right|}{\left|\left|\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}\right|\right|} \sim \frac{\mathcal{E}}{c^2\,T} \times \frac{L}{\mathcal{B}} \sim \frac{L^2}{c^2\,T^2} \qquad \text{car} \qquad \mathcal{E} \sim \frac{L}{T}\,\mathcal{B}$$

or le temps de propagation τ sur une distance L est, d'après la propriété initiale du chapitre, $\tau = L\,/\,c$ d'où

$$\frac{\left|\left|\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right|\right|}{\left|\left|\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}\right|\right|} \sim \frac{\tau^2}{T^2}$$

Conclusion de l'étude en ordre de grandeur.

Le calcul en ordre de grandeur précédent montre que **lorsque le temps de propagation τ de l'onde électromagnétique est très faible devant le temps typique du problème** T, c'est-à-dire

$$\tau \ll T$$

alors

$$\left|\left|\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right|\right| \ll \left|\left|\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}\right|\right|$$

Exemple. Prenons un circuit électrique constitué de câbles d'environ $L = 1$ m, alimenté par un générateur délivrant un signal de fréquence $f = 1$ kHz. Le temps typique du phénomène est alors $T = 1\,/\,f = 1$ ms, et le temps de propogation typique est $\tau = L\,/\,c \approx 3{,}3$ ns. On a donc $\tau \ll T$: on est bien dans la situation décrite ci-dessus.

1.2 Définition de l'ARQS magnétique

Définition. ARQS magnétique.

On appelle **approximation des régimes quasi-stationnaires** (ARQS) **magnétique** le fait de négliger le temps de propagation τ de l'onde électromagnétique, c'est-à-dire de considérer cette propagation comme **instantanée**. Cela se traduit mathématiquement par

$$\boxed{\tau \approx 0}$$

ou, plus précisément,

$$\boxed{\tau \ll T \qquad \text{pour } T \text{ un temps typique du problème.}}$$

Remarque. On parle d'ARQS « magnétique » car il existe également une ARQS électrique. Elle a moins d'applications pratiques, et son étude ne figure pas au programme de PC. En conséquence, on adoptera généralement le terme d' « ARQS » pour décrire l'ARQS magnétique, cela dans un but de concision.

Remarque. Pour l'exemple, le TD EM7-03 étudie une situation d'ARQS électrique.

Propriété. Simplification de l'équation de Maxwell-Ampère dans l'ARQS magnétique.

L'étude de l'équation de Maxwell-Ampère en ordre de grandeur précédente montre que dans l'ARQS, c'est-à-dire lorsque le temps de propagation τ de l'onde électromagnétique est très faible devant le temps typique du problème T, donc quand

$$\tau \ll T$$

alors on a

$$\left\| \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \right\| \ll \left\| \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B} \right\|$$

si bien qu'on peut en fait négliger l'apport de Maxwell et simplifer l'équation de Maxwell-Ampère en

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B} \approx \mu_0\,\overrightarrow{\jmath} \qquad \text{dans l'ARQSM.}}$$

1.3 Équations de Maxwell dans l'ARQSM

Équations de Maxwell dans l'ARQS. L'ARQS (magnétique) consiste à simplifier l'équation de Maxwell-Ampère comme nous l'avons discuté précédemment. Les quatre équations de Maxwell dans l'ARQS sont donc

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{B} = 0 \qquad \mathrm{div}\,\overrightarrow{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B} = \mu_0\,\overrightarrow{\jmath} \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$$

Attention. Remarquez que l'approximation des régimes quasi-stationnaires permet d'enlever le terme instationnaire $\mu_0\,\varepsilon_0\,\partial\overrightarrow{E}\,/\,\partial t$ dans l'équation de Maxwell-Ampère, **mais pas** le terme $\partial\overrightarrow{B}\,/\,\partial t$ dans l'équation de Maxwell-Faraday. En cela, l'approximation des régimes quasi-stationnaires en électromagnétisme n'est pas qu'une « bête » hypothèse de stationnarité où on supposerait directement

$$\frac{\partial\,\bullet}{\partial t} = 0$$

1.4 Propriétés de l'ARQSM

Il vous faut retenir quatre propriétés d'intérêt de l'électromagnétisme dans l'ARQSM :

— le champ magnétique se comporte comme en statique ;
— le champ électrique diffère de la statique (présence de phénomènes d'induction dans l'ARQS) ;
— il n'y a pas d'ondes électromgnétiques dans l'ARQS ;
— la loi des nœuds est vérifiée dans l'ARQS.

Propriété 1. Le champ magnétique se comporte comme en statique.

Dans l'ARQS, les équations de Maxwell portant sur le champ magnétique s'écrivent

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{B} = 0 \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B} = \mu_0\,\overrightarrow{\jmath}$$

Ce sont donc les mêmes équations fondamentales que dans le cas statique. Évidemment, si ce sont les mêmes équations, ce sont les mêmes solutions, de sorte que **tous les résultats démontrés dans les chapitres de magnétostatique** (EM4, EM5 et EM6) **sont encore vrais dans l'ARQS**. Notamment :

1. le théorème d'Ampère est valable,
2. le champ créé par un fil infini est $\overrightarrow{B} = \dfrac{\mu_0\,I(t)}{2\,\pi\,r}\,\overrightarrow{e_\theta}$;
3. le champ créé par un solénoïde infini est $\overrightarrow{B} = \mu_0\,n\,I(t)\,\overrightarrow{e_z}$.

Dans les deux derniers commentaires, on précise bien que l'intensité peut dépendre du temps (on n'est plus en statique, mais dans l'approximation quasi-stationnaire).

Propriété 2. Le champ électrique ne se comporte pas comme en statique.

Dans l'ARQS, les équations de Maxwell portant sur le champ électrique s'écrivent

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Ce sont donc **pas** les mêmes équations fondamentales que dans le cas statique, puisque **l'équation de Maxwell-Faraday change**. Par conséquent :

1. le champ électrique ne dérive plus d'un potentiel dans l'ARQS : il n'y a plus de potentiel V tel que $\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, V$;
2. l'équation de Maxwell-Faraday s'écrit dans l'ARQS comme dans le cas général : les phénomènes d'induction qu'elle dicte existent donc dans l'ARQS.

Propriété 3. L'ARQS ne permet pas de décrire la physique des ondes électromagnétiques.

En d'autres termes, les ondes électromagnétiques n'existent pas dans l'ARQS. Cela est évident puisque l'ARQS consiste à négliger le temps de propagation des champs (= des ondes) électromagnétiques.

On pourrait aussi dire que les équations de Maxwell dans l'ARQS ne conduisent pas à une équation de propagation. On peut d'ailleurs préciser que dans l'ARQS et dans le vide, on a `[à démontrer en exercice]`

$$\Delta \vec{E} = \vec{0} \qquad \text{et} \qquad \Delta \vec{B} = \vec{0}$$

qui ne sont pas des équations d'onde.

Propriété 4. Loi des nœuds dans l'ARQS.

Dans l'ARQS, on a la loi des nœuds (celle que vous avez apprise dans le cours d'électrocinétique de première année !)

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{\jmath} = 0}$$

qui est équivalente à dire que $\vec{\jmath}$ **est à flux conservatif**.

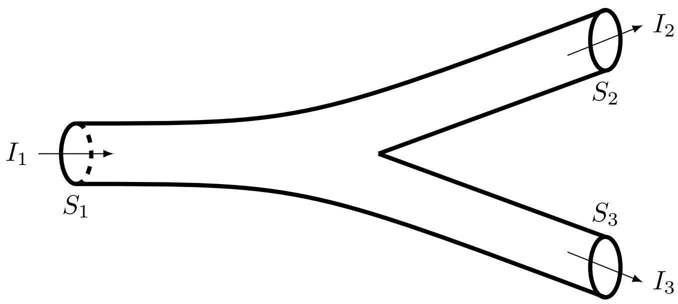
Commentaire 1. Démonstration. On reprend la démonstration de l'équation de conservation de la charge à partir des équations de Maxwell (voir chapitre EM7), mais cette fois dans l'ARQS. En calculant la divergence de l'équation de Maxwell-Ampère de l'ARQS, on obtient

$$\operatorname{div}\left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B}\right) = \mu_0 \operatorname{div} \vec{\jmath}$$

or $\operatorname{div}\left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \bullet\right) = 0$ toujours, donc effectivement, après division par μ_0,

$$\operatorname{div} \vec{\jmath} = 0$$

Commentaire 2. Lien avec la loi des nœuds. Puisque dans l'ARQS $\operatorname{div} \vec{\jmath} = 0$, alors $\vec{\jmath}$ est à flux conservatif, ce qui signifie que son flux est conservé le long d'un tube de courant. Considérons alors le tube de courant suivant :



Si $\vec{\jmath}$ est à flux conservatif, alors

$$\oiint_{\text{tube}} \vec{\jmath} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \iint_{S_1} \vec{\jmath} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_{S_2} \vec{\jmath} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \iint_{S_3} \vec{\jmath} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

car le flux à travers la surface latérale du tube de champ est nul ($\vec{\jmath} \perp \mathrm{d}\vec{S}$). Or, par définition, le flux de $\vec{\jmath}$ est justement l'intensité électrique, donc

$$\boxed{I_1 = I_2 + I_3} \qquad \textbf{(Loi des nœuds)}$$

C'est bien la loi des nœuds, qui exprime la **conservation du courant**.

2 Milieux conducteurs dans l'ARQS

2.1 Définition et loi d'Ohm locale

Définition. Milieu conducteur.

Un milieu dit conducteur est un milieu qui, lorsqu'il est soumis à un champ électrique $\vec{E}$, voit apparaître une densité de courant $\vec{\jmath}$ dans son volume.

Un tel milieu abrite des **porteurs de charges** (électrons, ions, trous,...) libres de se déplacer dans son volume. On parle de **charges libres**, à opposer aux charges liées (électrons de cœur dans les atomes, ions dans les cristaux ioniques,...) qui restent fixes et ne permettent donc pas le transport d'un courant.

Un milieu conducteur s'oppose quant à lui à un **milieu isolant**.

Propriété. Loi d'Ohm locale. Puisque dans un conducteur un champ électrique $\vec{E}$ crée une densité de courant $\vec{\jmath}$, la loi la plus simple possible pour décrire cela est de considérer une relation de proportionnalité entre les deux : cela constitue la loi d'Ohm locale.

Dans un conducteur dans l'ARQS, on admet donc **la loi d'Ohm locale**

$$\boxed{\vec{\jmath} = \gamma \vec{E}}$$

où le coefficient de proportionnalité γ est appelé la **conductivité électrique du matériau**.

Remarque 1. Unité. La conductivité γ s'exprime en $\mathrm{S \cdot m^{-1}}$, le **siemens** S étant l'unité de la conductance. Pour rappel, la conductance G est l'inverse de la résistance R, de sorte que le siemens est l'inverse des Ohms

$$1\ \mathrm{S} = 1\,\Omega^{-1}$$

Attention à ne pas confondre la conductivité γ et la conductance G. On démontre le lien entre les deux dans la partie suivante.

Remarque 2. Valeurs numériques. La conductivité γ est une caractéristique physique qui varie considérablement d'un matériau à l'autre.

Très bon conducteur : le cuivre	$\gamma \approx 6{,}0 \times 10^{7}\ \mathrm{S \cdot m^{-1}}$
Très mauvais conducteur : plastique isolant	$\gamma \approx 1{,}0 \times 10^{-20}\ \mathrm{S \cdot m^{-1}}$

soit presque 28 ordres de grandeur de différence entre les deux ! La valeur de la conductivité du cuivre est à retenir.

Remarque 3. La loi d'Ohm locale est phénoménologique. La loi d'Ohm locale n'a pas de justifications théoriques. Notamment, elle ne découle pas de lois plus fondamentales (même si on peut la déduire d'un principe fondamental de la dynamique dans le cadre du modèle de Drüde, voir chapitre O8). Elle a en fait le statut de **loi phénoménologique**, c'est-à-dire que c'est une loi qu'on écrit « car elle rend correctement compte des phénomènes observés ». On ne la considère donc valable que si elle permet de décrire la situation d'intérêt. En d'autres termes, une loi phénoménologique est valable « lorsqu'elle est valable » ! Si écrire la loi d'Ohm locale ne conduit pas par le calcul à la description du phénomène visé, c'est que la loi d'Ohm locale n'est pas valable dans ce cas, et tant pis ! Il faut simplement proposer une autre loi.

Donnons ensuite quelques résultats plus intéressants.

Remarque 4. Analogie avec d'autres domaine de la physique. En statique, la loi de Maxwell-Faraday permet d'écrire

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\vec{\jmath} = -\gamma\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V \qquad \textbf{(en statique)}}$$

La loi d'Ohm locale écrite sous cette forme est en tous points analogue aux lois phénoménologiques de la diffusion de particules et de la diffusion thermique (voir les chapitres D1 et D2)

$$\vec{\jmath}_N = -D\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, n \qquad \text{et} \qquad \vec{\jmath}_Q = -\lambda\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, T$$

Le phénomène de conduction électrique est donc, de manière sous-jacente, un **phénomène de diffusion** !

Remarque 5. Milieu isolant. On appelle milieu isolant un milieu qui est un très mauvais conducteur. Sa conductivité électrique étant très faible, on fait l'hypothèse que $\gamma = 0$ pour un isolant. La loi d'Ohm locale donne alors $\vec{\jmath} = \vec{0}$: il n'y a donc pas de courant dans un isolant.

Remarque 6. Un conducteur est neutre. Dans l'ARQS, on a la loi des nœuds

$$\operatorname{div} \vec{\jmath} = 0$$

On déduit de la loi d'Ohm locale que

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0$$

et donc, d'après l'équation de Maxwell-Gauss,

$$\boxed{\varrho = 0}$$

Un milieu conducteur est donc **forcément neutre dans l'ARQS**. En conclusion, on retiendra que

un conducteur	=	des charges liées	+	des charges libres
		assurent l'électroneutralité mais ne se déplacent pas (ions fixes et électrons de cœur)		se déplacent et permettent le passage du courant $\vec{\jmath} = \varrho_{\text{libre}}\,\vec{v}$ (ions libres et électrons de conduction)

2.2 Application : résistance d'un fil électrique

A Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide

Pour simplifier, on considère dans cette partie que l'onde électromagnétique se propage **dans le vide**. Dans le vide, il n'y a évidemment ni charges ni courant :

$$\varrho = 0 \qquad \text{et} \qquad \vec{\jmath} = \vec{0}$$

de sorte que les équations de Maxwell s'écrivent

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \qquad \operatorname{div} \vec{E} = 0$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = \mu_0\, \varepsilon_0\, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

À partir de ces équations, nous voulons établir l'équation de propagation de l'onde électromagnétique. On utilise pour cela la propriété suivante.

Propriété. Soit un champ de vecteur $\vec{A}$ quelconque. On a

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\,\vec{A}\right) - \Delta\vec{A}}$$

Cette formule à connaître est **toujours vraie**, c'est une propriété des opérateurs différentiels. Elle est notamment vraie quelque soit le système de coordonnées utilisé.

Méthode. Lorsqu'on vous demande de déterminer l'équation de propagation de $\vec{E}$, il faut calculer

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}$$

par la propriété précédente **et** à l'aide des équations de Maxwell. Cela est très général, c'est-à-dire valable quelque soit le contexte : onde EM dans le vide, dans un plasma, dans un conducteur, dans un supraconducteur, dans un isolant,... *Remarque. De manière identique, il faut calculer $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}$ si on vous demande l'équation de propagation de $\vec{B}$.*

On revient à l'étude des ondes électromagnétiques dans le vide. On calcule

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} &= \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\,\vec{E}\right) - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E} && \text{(par l'équation de Maxwell-Gauss div } \vec{E} = 0\text{)} \\
&= \overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) && \text{(d'après l'équation de Maxwell-Faraday)} \\
&= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}\right) && \text{(par théorème de Schwarz)} \\
&= -\mu_0\,\varepsilon_0\,\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} && \text{(par l'équation de Maxwell-Ampère)}
\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\Delta\vec{E} - \mu_0\,\varepsilon_0\,\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

Conclusion. Célérité des ondes électromagnétiques dans le vide. Le champ électrique dans le vide vérifie donc une équation de d'Alembert tridimensionnelle

$$\boxed{\Delta\vec{E} - \mu_0\,\varepsilon_0\,\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

caractéristique d'un phénomène de propagation sans absorption ni dispersion, à la célérité

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\,\varepsilon_0}}}$$

dont l'application numérique donne la valeur bien connue

$$\boxed{c = 3{,}0 \times 10^8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

On identifie ainsi c, la **célérité de la lumière dans le vide**. C'est une constante fondamentale de la physique (en tant que produit des constantes fondamentales μ_0 et ε_0). On retiendra la relation

$$\boxed{\mu_0\,\varepsilon_0\,c^2 = 1}$$

Remarque. c est appelée célérité de la lumière dans le vide, mais vous avez compris par notre calcul que c'est en fait la célérité de n'importe quelle onde électromagnétique dans le vide (radio, micro-ondes, infrarouge, visible, UV, X, γ,...) et pas seulement celle de la lumière.

Exercice. Démontrez que $\vec{B}$ vérifie la même équation de propagation dans le vide.