EM7-Cours

Équations de Maxwell

La physique admet l'existence de quatre interactions fondamentales :
- la gravitation (qui régit le mouvement des planètes, des galaxies... et le poids au quotidien) ;
- les deux interactions forte et faible (qui régissent la structure et la stabilité des noyaux atomiques) ;
- et l'électromagnétisme, qui régit **tout le reste !** La cohésion des matériaux, l'électronique, l'optique, l'induction, les ondes EM (radio, portable, wifi, lumière, rayons X,...), toute la chimie et par extension la biologie... tout cela est inscrit dans les équations de Maxwell.

Historiquement : travaux de Faraday, Gauss, Ampère et bien d'autres, puis **Maxwell en fait une synthèse en 1864, en ajoutant un terme**. Maxwell prédit avec ce terme supplémentaire essentiel l'existence des ondes radio qui seront observées par Hertz une vingtaine d'année plus tard, en 1888.

Les équations de Maxwell présentent néanmoins **une limite : le photon** (aspect quantique de l'électromagnétisme) n'est pas décrit par celles-ci. Cette description nécessite de quantifier (au sens de « rendre cohérent avec la physique quantique ») les équations de Maxwell, ce qui est réalisé par l'électrodynamique quantique.

Table des matières

1 Les quatre équations de Maxwell

Vous prendrez soin de percevoir que l'écriture de ces équations, en tant que principes fondamentaux qui gouvernent l'univers, constitue une réussite grandiose de l'humanité.

1.1 Énoncé

Le champ électromagnétique est défini par la **force de Lorentz** que subit une particule de charge q et de vitesse $\vec{v}$

$$\boxed{\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)}$$

Le champ électromagnétique est régi par les quatre équations de Maxwell

Équation de Maxwell-Flux $\boxed{\operatorname{div}\vec{B} = 0}$

Équation de Maxwell-Gauss $\boxed{\operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\varrho}{\varepsilon_0}}$

Équation de Maxwell-Faraday $\boxed{\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$

Équation de Maxwell-Ampère $\boxed{\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{\jmath} + \mu_0\,\varepsilon_0\,\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$

avec ϱ la densité volumique de charge et $\vec{\jmath}$ la densité surfacique de courant.

1.2 Discussion

► Les équations de Maxwell sont linéaires : on a donc le théorème de superposition pour les champs et on peut également écrire les équations en notation complexe (voir chapitre O6).

► Les équations de Maxwell se lisent de droite à gauche : « à gauche les conséquences = à droite les causes ».

► **Équation de Maxwell-Flux** (parfois appelée équation de Maxwell-Thomson) $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$:

1) il n'existe pas de monopôle magnétique,

2) les lignes de champ $\vec{B}$ sont toujours fermées.

► **Équation de Maxwell-Gauss** $\mathrm{div}\,\vec{E} = \varrho\,/\,\varepsilon_0$:

1) les charges électriques ϱ créent des champs électriques $\vec{E}$.

► **Équation de Maxwell-Faraday** $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\,\partial\vec{B}\,/\,\partial t$:

1) un champ magnétique qui varie dans le temps crée un champ électrique. C'est le phénomène d'induction !

2) Cette équation change par rapport au cas de la statique. Dans le cas général, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} \neq \vec{0}$ donc $\vec{E} \neq -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$. Le champ $\vec{E}$ n'est pas à circulation conservative dans le cas général.

3) On peut commenter que les équations de Maxwell sont bien cohérentes entre elles :

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}\right) &= 0 && \text{(toujours)}\\
&= \mathrm{div}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) && \text{(par Maxwell-Faraday)}\\
&= -\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{div}\,\vec{B} && \text{(par commutation des opérateurs différentiels)}\\
&= 0 && \text{(par Maxwell-Flux)}
\end{aligned}$$

► **Équation de Maxwell-Ampère** $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{\jmath} + \mu_0\,\varepsilon_0\,\partial\vec{E}\,/\,\partial t$:

1) Les courants électriques créent des champs magnétiques.

2) Un champ électrique qui dépend du temps crée un champ magnétique (et ça on ne le savait pas avant !).

3) Cette équation change également par rapport à la statique.

► Les équations de Maxwell se réunissent en deux groupes :

$$\textbf{Groupe 1 :}\qquad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \textbf{(Équations de structure)}$$

qui sont indépendantes du milieu (c'est-à-dire indépendantes des charges ϱ et des courants $\vec{\jmath}$). On les appelle des **équations de structure**, car elles structurent la géométrie des ondes électromagnétiques indépendamment du milieu de propagation. Les deux autres

$$\textbf{Groupe 2 :}\qquad \mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{\jmath} + \mu_0\,\varepsilon_0\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad \textbf{(Interactions champ/milieu)}$$

explicitent les interactions entre les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ et le milieu ϱ et $\vec{\jmath}$.

► Par ailleurs, les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{\jmath} + \mu_0\,\varepsilon_0\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

relient directement $\vec{E}$ et $\vec{B}$: il y a un **couplage spatio-temporel** entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$. Il n'y a donc pas un champ électrique $\vec{E}$ d'une part et un champ magnétique $\vec{B}$ d'autre part, mais un unique champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$: l'un ne vit pas sans l'autre !

► **Le cas de la statique.** Si les champs ne dépendent pas du temps (cas stationnaire) alors on a d'une part

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$$

qui correspond à l'électrostatique (cf chapitre EM1), et d'autre part

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{\jmath}$$

qui correspond à la magnétostatique (cf chapitre EM4). On observe ainsi qu'**en statique, les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont complètement découplés**.

▶ **Apport de Maxwell.** Le terme ajouté par Maxwell est $\mu_0\,\varepsilon_0\,\partial\vec{E}\,/\,\partial t$ dans l'équation de Maxwell-Ampère

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{\jmath} + \mu_0\,\varepsilon_0\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Cet apport est essentiel : il permet d'assurer théoriquement la conservation de la charge (voir partie 2 de ce chapitre) et prédit l'existence des ondes électromagnétiques (voir chapitre O6).

▶ Pour finir : la force de Lorentz et les quatre équations de Maxwell sont les cinq équations fondamentales de la physique (elles ne se démontrent pas) qui dictent tous les phénomènes électromagnétiques.

1.3 Formulations intégrales des équations de Maxwell

▶ Les quatre équations de Maxwell sont « **locales** » : l'équation de Maxwell-Gauss $\mathrm{div}\,\vec{E} = \varrho\,/\,\varepsilon_0$ relie par exemple $\vec{E}(M,t)$ au point M à $\varrho(M,t)$, au même point M.

▶ Au contraire, le théorème de Gauss relie $\vec{E}$ sur une surface à Q_{int} à l'intérieur de cette surface, donc pas au même endroit ! Cette formulation est pour cette raison dite « non locale », et on parle en fait de **forme intégrale**.

▶ Toutes les équations de Maxwell ont une forme intégrale. Il faut les connaître, et savoir démontrer l'équivalence entre forme locale et forme intégrale dans les deux sens. Ces démonstrations se basent sur les **théorèmes de Stokes et de Green-Ostrogradski**, dont on rappelle les énoncés :

$$\begin{aligned}
\oiint_S \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S} &= \iiint_{V_{\mathrm{int}}} \mathrm{div}\,\vec{A}\,\mathrm{d}V && \text{(Théorème de Green-Ostrogradski)}\\
\oint_C \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} &= \iint_{S_{\mathrm{rep}}} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S} && \text{(Théorème de Stokes)}
\end{aligned}$$

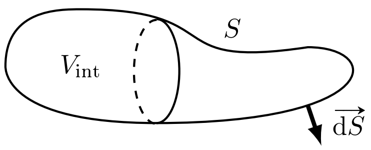
où V_{int} est le volume à l'intérieur de la surface S fermée, et S_{rep} est une surface qui repose sur le contour C.

On donne ci-dessous, avec leurs démonstrations, les formes intégrales des quatre équations de Maxwell.

Équation de Maxwell-Flux. $\vec{B}$ est à flux conservatif.

$$\boxed{\text{(Forme locale)} \qquad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \oiint_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0 \qquad \text{(Forme intégrale)}}$$

Démonstration du sens direct $\Rightarrow$. On suppose que $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ et on veut montrer que le flux de $\vec{B}$ à travers n'importe quelle surface fermée est nul. On calcule



$$\begin{aligned}
\oiint_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} &= \iiint_{V_{\mathrm{int}}} \mathrm{div}\,\vec{B}\,\mathrm{d}V && \text{(d'après le théorème de Green-Ostrogradski)}\\
&= \iiint_{V_{\mathrm{int}}} 0\,\mathrm{d}V && \text{(car } \mathrm{div}\,\vec{B} = 0\text{)}\\
&= 0 && \text{effectivemment.}
\end{aligned}$$

Démonstration du sens indirect $\Leftarrow$. On suppose que le flux de $\vec{B}$ à travers n'importe quelle surface fermée est nul et on veut montrer que $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$. On considère pour cela une surface fermée S quelconque et on calcule

$$\oiint_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0 = \iiint_{V_{\mathrm{int}}} \mathrm{div}\,\vec{B}\,\mathrm{d}V \qquad \text{(d'après le théorème de Green-Ostrogradski)}$$

Donc on a

$$\iiint_{V_{\mathrm{int}}} \mathrm{div}\,\vec{B}\,\mathrm{d}V = 0$$

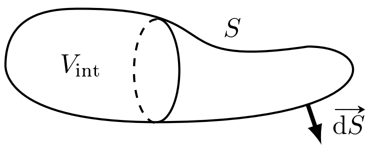
quelque soit la surface S donc pour un volume V_{int} quelconque. La fonction $\mathrm{div}\,\vec{B}$ est donc d'intégrale nulle quelque soit le volume sur lequel on l'intègre : c'est que la fonction est nulle elle-même. On conclut

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

Équation de Maxwell-Gauss. Théorème de Gauss.

$$\text{(Forme locale)} \qquad \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \qquad \text{(Forme intégrale)}$$

Démonstration du sens direct $\Rightarrow$. On suppose que $\operatorname{div} \vec{E} = \varrho \,/\, \varepsilon_0$ et on veut montrer que le flux de $\vec{E}$ à travers n'importe quelle surface fermée vaut $Q_{\text{int}} \,/\, \varepsilon_0$. On calcule



$$\begin{aligned}
\oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} &= \iiint_{V_{\text{int}}} \operatorname{div} \vec{E} \, \mathrm{d}V && \text{(d'après le théorème de Green-Ostrogradski)} \\
&= \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{V_{\text{int}}} \varrho \, \mathrm{d}V && (\text{car } \operatorname{div} \vec{E} = \varrho \,/\, \varepsilon_0) \\
&= \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} && \text{effectivemment.}
\end{aligned}$$

Démonstration du sens indirect $\Leftarrow$. On suppose que le flux de $\vec{E}$ à travers n'importe quelle surface fermée vaut $Q_{\text{int}} \,/\, \varepsilon_0$ et on veut montrer que $\operatorname{div} \vec{E} = \varrho \,/\, \varepsilon_0$. On considère pour cela une surface fermée S quelconque et on calcule

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \iiint_{V_{\text{int}}} \operatorname{div} \vec{E} \, \mathrm{d}V \qquad \text{(d'après le théorème de Green-Ostrogradski)}$$

Or

$$Q_{\text{int}} = \iiint_{V_{\text{int}}} \varrho \, \mathrm{d}V$$

donc

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{V_{\text{int}}} \varrho \, \mathrm{d}V = \iiint_{V_{\text{int}}} \operatorname{div} \vec{E} \, \mathrm{d}V \qquad \text{soit} \qquad \iiint_{V_{\text{int}}} \left(\operatorname{div} \vec{E} - \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \right) \mathrm{d}V = 0$$

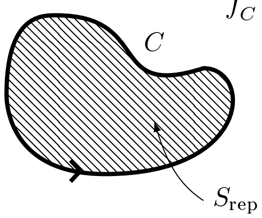
quelque soit la surface S donc pour un volume V_{int} quelconque. La fonction $\operatorname{div} \vec{E} - \varrho \,/\, \varepsilon_0$ est donc d'intégrale nulle quelque soit le volume sur lequel on l'intègre : c'est que la fonction est nulle elle-même. On conclut

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}$$

Équation de Maxwell-Faraday. Loi de Faraday.

$$\text{(Forme locale)} \qquad \overrightarrow{\operatorname{rot}} \, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \Longleftrightarrow \qquad e = \oint_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(Forme intégrale)}$$

Démonstration du sens direct $\Rightarrow$. On suppose que $\overrightarrow{\operatorname{rot}} \, \vec{E} = -\partial \vec{B} \,/\, \partial t$ et on veut montrer que la circulation de $\vec{E}$ le long de n'importe quel contour fermé vaut $-\mathrm{d}\phi \,/\, \mathrm{d}t$. On calcule



$$\begin{aligned}
\oint_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} &= \iint_{S_{\text{rep}}} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \, \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} && \text{(d'après le théorème de Stokes)} \\
&= -\iint_{S_{\text{rep}}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S} && \left(\text{car } \overrightarrow{\operatorname{rot}} \, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \\
&= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\iint_{S_{\text{rep}}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \right) && \text{(par inversion dérivée temporelle / intégration spatiale)} \\
&= -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} && \text{en notant } \phi \text{ le } \textbf{flux magnétique}.
\end{aligned}$$

Démonstration du sens indirect $\Leftarrow$. On suppose que la circulation de $\vec{E}$ le long de n'importe quel contour fermé vaut $-\mathrm{d}\phi / \mathrm{d}t$ et on veut montrer que $\overrightarrow{\operatorname{rot}} \, \vec{E} = -\partial \vec{B} \,/\, \partial t$. On considère pour cela un contour fermé C quelconque et on calcule

$$\oint_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \iint_{S_{\text{rep}}} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \, \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \qquad \text{(d'après le théorème de Stokes)}$$

Or

$$\phi = \iint_{S_{\text{rep}}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \qquad \text{donc} \qquad \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\iint_{S_{\text{rep}}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \right) = \iint_{S_{\text{rep}}} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

donc

$$\iint_{S_{\text{rep}}} \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}\cdot\overrightarrow{\text{d}S} = -\iint_{S_{\text{rep}}}\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)\cdot\overrightarrow{\text{d}S} \qquad \text{soit} \qquad \iint_{S_{\text{rep}}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)\cdot\overrightarrow{\text{d}S}=0$$

quelque soit le contour C donc pour une surface S_{rep} quelconque. La fonction $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}+\partial\vec{B}\,/\,\partial t$ est donc de flux nul quelque soit la surface sur laquelle on l'intègre : c'est que la fonction est nulle elle-même. On conclut

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

Équation de Maxwell-Ampère. Théorème d'Ampère généralisé.

$$\boxed{\text{(Forme locale)}\quad \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{\jmath}+\varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad\Longleftrightarrow\quad \oint_C \vec{B}\cdot\overrightarrow{\text{d}\ell} = \mu_0\,(I_{\text{enlacée}}+I_{\text{déplacement}})\quad\text{(Forme intégrale)}}$$

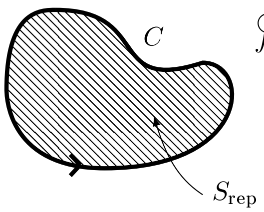
où $I_{\text{déplacement}} = \varepsilon_0 \displaystyle\iint_S \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot\overrightarrow{\text{d}S}$.

Remarque. On parle de théorème d'Ampère **généralisé** car il prend une forme différente (il y a le terme $I_{\text{déplacement}}$ en plus) du théorème d'Ampère de la statique.

Définition. On appelle **densité de courant de déplacement** le vecteur

$$\boxed{\vec{\jmath}_D = \varepsilon_0\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}} \qquad \text{de sorte que} \qquad I_{\text{déplacement}} = \iint_S \vec{\jmath}_D\cdot\overrightarrow{\text{d}S} = \varepsilon_0\iint_S\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot\overrightarrow{\text{d}S}$$

Démonstration du sens direct $\Rightarrow$. On suppose que $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}=\mu_0\,\vec{\jmath}+\mu_0\,\varepsilon_0\,\partial\vec{E}\,/\,\partial t$ et on veut montrer que la circulation de $\vec{B}$ le long de n'importe quel contour fermé vaut $\mu_0\,(I_{\text{enlacée}}+I_{\text{déplacement}})$. On calcule



$$\begin{aligned}
\oint_C \vec{B}\cdot\overrightarrow{\text{d}\ell} &= \iint_{S_{\text{rep}}}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}\cdot\overrightarrow{\text{d}S} && \text{(d'après le théorème de Stokes)}\\
&= \mu_0\iint_{S_{\text{rep}}}\vec{\jmath}\cdot\overrightarrow{\text{d}S}+\mu_0\,\varepsilon_0\iint_{S_{\text{rep}}}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot\overrightarrow{\text{d}S} && (\text{car } \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}=\mu_0\,\vec{\jmath}+\mu_0\,\varepsilon_0\,\partial\vec{E}\,/\,\partial t)\\
&= \mu_0\,(I_{\text{enlacée}}+I_{\text{déplacement}}) && \text{effectivemment.}
\end{aligned}$$

Démonstration du sens indirect $\Leftarrow$. On suppose que la circulation de $\vec{B}$ le long de n'importe quel contour fermé vaut $\mu_0\,(I_{\text{enlacée}}+I_{\text{déplacement}})$ et on veut montrer que $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}=\mu_0\,\vec{\jmath}+\mu_0\,\varepsilon_0\,\partial\vec{E}\,/\,\partial t$. On considère pour cela un contour fermé C quelconque et on calcule

$$\oint_C\vec{B}\cdot\overrightarrow{\text{d}\ell}=\mu_0\,(I_{\text{enlacée}}+I_{\text{déplacement}})=\iint_{S_{\text{rep}}}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}\cdot\overrightarrow{\text{d}S}\qquad\text{(d'après le théorème de Stokes)}$$

Or

$$\mu_0\,(I_{\text{enlacée}}+I_{\text{déplacement}})=\mu_0\iint_{S_{\text{rep}}}\vec{\jmath}\cdot\overrightarrow{\text{d}S}+\mu_0\iint_{S_{\text{rep}}}\vec{\jmath}_D\cdot\overrightarrow{\text{d}S}=\mu_0\iint_{S_{\text{rep}}}\vec{\jmath}\cdot\overrightarrow{\text{d}S}+\mu_0\,\varepsilon_0\iint_{S_{\text{rep}}}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot\overrightarrow{\text{d}S}$$

donc

$$\iint_{S_{\text{rep}}}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}\cdot\overrightarrow{\text{d}S}=\mu_0\iint_{S_{\text{rep}}}\vec{\jmath}\cdot\overrightarrow{\text{d}S}+\mu_0\,\varepsilon_0\iint_{S_{\text{rep}}}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot\overrightarrow{\text{d}S}$$

soit

$$\iint_{S_{\text{rep}}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}-\mu_0\,\vec{\jmath}-\mu_0\,\varepsilon_0\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\cdot\overrightarrow{\text{d}S}=0$$

quelque soit le contour C donc pour une surface S_{rep} quelconque. La fonction $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}-\mu_0\,\vec{\jmath}-\mu_0\,\varepsilon_0\,\partial\vec{E}\,/\,\partial t$ est donc de flux nul quelque soit la surface sur laquelle on l'intègre : c'est que la fonction est nulle elle-même. On conclut

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}=\mu_0\,\vec{\jmath}+\varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Bilan. Formulations intégrales des équations de Maxwell.

Les quatre équations intégrales ci-dessous sont strictement équivalentes aux quatre équations de Maxwell.

Conservation du flux magnétique	$\boxed{\oiint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0}$
Théorème de Gauss	$\boxed{\oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}}$
Loi de Faraday	$\boxed{e = \oint_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}}$
Théorème d'Ampère généralisé	$\boxed{\oint_C \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 \left(I_{\text{enlacée}} + I_{\text{déplacement}}\right)}$

2 Conservation de la charge électrique

2.1 Expression de la densité surfacique de courant

Densité surfacique de flux de charge $\vec{\jmath}$. Appelée aussi (vecteur) densité (surfacique) de courant (électrique), puisqu'un flux de charges est un courant. C'est la densité de courant que nous avons rencontré au chapitre EM4. Elle est telle que l'intensité s'exprime comme

$$I = \iint_S \vec{\jmath} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

Exprimons-la à partir de la densité de charges libres (c'est-à-dire susceptibles de se déplacer). Soit un ensemble de charges libres, de densité volumique ϱ et animées d'une vitesse $\vec{v}$. La densité de courant résultante est

$$\boxed{\vec{\jmath} = \varrho\,\vec{v}} \qquad (\text{en } \mathrm{A\cdot m^{-2}})$$

Remarque. Cette propriété est en tout point similaire à celle du vecteur densité surfacique de courant de masse en mécanique des fluides

$$\vec{\jmath} = \varrho\,\vec{v} \qquad \text{avec} \qquad \varrho \text{ la masse volumique} \qquad \text{et} \qquad \vec{v} \text{ le champ de vitesse.}$$

L'intensité est un débit de charge, analogue au débit massique

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \iint_S \vec{\jmath} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \qquad \text{comme} \qquad D_m = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \iint_S \vec{\jmath} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

où le $\vec{\jmath}$ de gauche est la densité de courant électrique et celui de droite la densité de courant de masse.

Propriété. Si l'ensemble de charges est constitué de particules de charge individuelle q et de densité (en nombre) n (en $\mathrm{m^{-3}}$ donc), alors

$$\varrho = n\,q \qquad (\text{en } \mathrm{C\cdot m^{-3}})$$

et donc

$$\boxed{\vec{\jmath} = n\,q\,\vec{v}}$$

Exemples. ▶ Pour un ensemble d'**électrons** ($q = -e$), on a ainsi

$$\boxed{\vec{\jmath} = -n\,e\,\vec{v}}$$

▶ Si il y a différents types de charges (charge q_i, densité en nombre n_i, vitesse $\vec{v_i}$), alors

$$\vec{\jmath} = \sum_{\text{type } i} n_i\,q_i\,\vec{v_i}$$

C'est le cas dans l'eau par exemple où différents ions HO^-, H_3O^+, Cl^-, Na^+,... permettent la conduction du courant.

2.2 Énoncé de l'équation de continuité

Les sources du champ électromagnétique sont les charges ϱ et les courants $\vec{\jmath}$. Ces deux quantités ne sont pas indépendantes car **la charge est une grandeur conservative** (c'est-à-dire constante pour un système fermé) : elles sont par conséquent reliées par une équation de conservation.

Équation de continuité. L'équation de conservation de la charge électrique s'écrit

$$\boxed{\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\jmath} = 0}$$

Elle a bien la forme d'une équation de conservation. Pour rappel et par exemple, l'équation de conservation de la masse en mécanique des fluides s'écrit exactement de la même manière

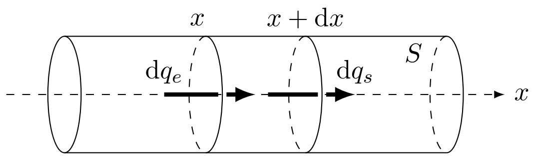
$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\jmath} = 0$$

où ϱ est la densité volumique de masse (c'est-à-dire la masse volumique) et $\vec{\jmath}$ le vecteur densité surfacique de flux de masse $\vec{\jmath} = \varrho\, \vec{v}$.

2.3 Démonstration de l'équation de continuité par un bilan

Démontrons que si la charge est une grandeur conservative, alors l'équation de continuité est vérifiée. On peut dresser un bilan pour cela. Commençons par un bilan sur un système à une dimension.

À une dimension. On considère un milieu cylindrique, de section S et d'axe (Ox). Dans ce milieu vivent des charges, de densité $\varrho(x,t)$. Ces charges sont susceptibles de se déplacer, en provoquant ainsi un courant de densité $\vec{\jmath} = j(x,t)\, \vec{e_x}$.



On considère le système (ouvert) entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$. Calculons la variation de charge $\mathrm{d}q$ de ce système entre t et $t + \mathrm{d}t$. On a d'une part, avec des notations explicites,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^2 q &= \mathrm{d}q(t+\mathrm{d}t) - \mathrm{d}q(t) && (\text{« à la fin »} - \text{« au début »}) \\
&= \varrho(x,t+\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}V - \varrho(x,t)\,\mathrm{d}V && (\text{charge} = \text{charge volumique} \times \text{volume}) \\
&= \frac{\partial \varrho}{\partial t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}V && (\text{développement à l'ordre 1 en } \mathrm{d}t) \\
&= \frac{\partial \varrho}{\partial t}\,\mathrm{d}t\, S\,\mathrm{d}x && (\text{car volume} = \text{section} \times \text{longueur})
\end{aligned}$$

et d'autre part, on exprime $\mathrm{d}q_e$ la charge qui rentre dans le système à travers la section en x, entre t et $t + \mathrm{d}t$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}q_e &= I(x,t)\,\mathrm{d}t && (\text{l'intensité est un débit de charge, } I = \mathrm{d}q\,/\,\mathrm{d}t) \\
&= \left(\iint_S \vec{\jmath}(x,t)\cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}\right)\mathrm{d}t \\
&= \left(\iint_S j(x,t)\,\mathrm{d}S\right)\mathrm{d}t && (\text{car les deux vecteurs sont selon } \vec{e_x}) \\
&= j(x,t)\,S\,\mathrm{d}t && (\text{car } j \text{ est constant sur } S)
\end{aligned}$$

De manière identique, on exprime $\mathrm{d}q_s$ la charge qui sort du système à travers la section en $x + \mathrm{d}x$, entre t et $t + \mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}q_s = j(x+\mathrm{d}x,t)\,S\,\mathrm{d}t$$

Ensuite, **puisque la charge est conservative**, elle ne peut pas apparaître de nulle part ou disparaître, de sorte que la variation de charge du système est uniquement due aux échanges en x et $x + \mathrm{d}x$. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^2 q &= \mathrm{d}q_e - \mathrm{d}q_s && (\text{on compte la masse qui sort avec un } -) \\
&= j(x,t)\,S\,\mathrm{d}t - j(x+\mathrm{d}x,t)\,S\,\mathrm{d}t && (\text{calculés précédemment}) \\
&= -\frac{\partial j}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,S\,\mathrm{d}t && (\text{développement à l'ordre 1 en } \mathrm{d}x)
\end{aligned}$$

La comparaison des deux expressions de $\mathrm{d}^2 q$ conduit à

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t}\,\mathrm{d}t\,S\,\mathrm{d}x = -\frac{\partial j}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,S\,\mathrm{d}t$$

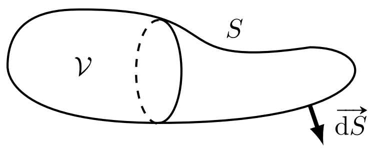
d'où finalement

$$\boxed{\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0}$$

qui est bien l'équation de continuité à une dimension.

Démontrons-la également dans le cas général (à trois dimensions donc). La démonstration est hors-programme mais est intéressante car elle se base sur le théorème de Green-Ostrogradski.

À trois dimensions. On considère comme système un volume $\mathcal{V}$, délimité par une surface S (fermée donc orientée sortante).



La charge $q(t)$ contenue dans ce volume à l'instant t est

$$q(t) = \iiint_{\mathcal{V}} \varrho(M,t)\,\mathrm{d}V$$

À $t+\mathrm{d}t$, elle vaut

$$q(t+\mathrm{d}t) = \iiint_{\mathcal{V}} \varrho(M,t+\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}V$$

La variation de la charge du système entre t et $t+\mathrm{d}t$ est donc

$$\mathrm{d}q = q(t+\mathrm{d}t) - q(t) = \iiint_{\mathcal{V}} \Big(\varrho(M,t+\mathrm{d}t) - \varrho(M,t)\Big)\,\mathrm{d}V = \left(\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \varrho}{\partial t}\,\mathrm{d}V\right)\mathrm{d}t$$

Par ailleurs, **puisque la charge est conservative**, cette variation de charge est uniquement due au flux de charge à travers S. On a en fait

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}q &= -I_{\text{sortant}}\,\mathrm{d}t && \text{(avec un } - \text{ car } q \text{ diminue si } I_{\text{sortant}} > 0\text{)}\\
&= -\left(\oiint_S \overrightarrow{\jmath}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S}\right)\mathrm{d}t && (\mathrm{d}\overrightarrow{S} \text{ est orienté sortant pour rappel})\\
&= -\left(\iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{div}\,\overrightarrow{\jmath}\,\mathrm{d}V\right)\mathrm{d}t && \text{(d'après le théorème de Green-Ostrogradski)}
\end{aligned}$$

La comparaison des deux expressions conduit à

$$\left(\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \varrho}{\partial t}\,\mathrm{d}V\right)\mathrm{d}t = -\left(\iiint_{V} \mathrm{div}\,\overrightarrow{\jmath}\,\mathrm{d}V\right)\mathrm{d}t$$

soit

$$\iiint_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\overrightarrow{\jmath}\right)\mathrm{d}V = 0$$

Ayant considéré initialement un volume $\mathcal{V}$ quelconque, on comprend que la fonction $\partial\varrho\,/\,\partial t + \mathrm{div}\,\overrightarrow{\jmath}$ a une intégrale nulle peu importe le volume sur lequel on l'intègre : c'est que la fonction est nulle elle-même. On conclut

$$\boxed{\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\overrightarrow{\jmath} = 0}$$

qui est bien l'équation de continuité à trois dimensions.

2.4 L'équation de continuité est inscrite dans les équations de Maxwell

La conservation de la charge électrique, c'est-à-dire le fait que la charge électrique est une grandeur **conservative** (ce qui signifie qu'elle est constante pour un système fermé) n'est pas un postulat de la physique. Elle est au contraire une conséquence des lois plus fondamentales que sont les équations de Maxwell.

Effectivemment, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B}\right) &= 0 && \text{(car } \operatorname{div}\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,(\cdot) = 0 \text{ toujours)} \\
&= \operatorname{div}\left(\mu_0\,\vec{\jmath} + \mu_0\,\varepsilon_0\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) && \text{(d'après l'équation de Maxwell-Ampère)} \\
&= \mu_0 \operatorname{div}\vec{\jmath} + \varepsilon_0\,\mu_0 \operatorname{div}\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) && \text{(par linéarité de la divergence)} \\
&= \mu_0 \operatorname{div}\vec{\jmath} + \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial \operatorname{div}\vec{E}}{\partial t} && \text{(par théorème de Schwarz)} \\
&= \mu_0 \operatorname{div}\vec{\jmath} + \mu_0\,\frac{\partial\varrho}{\partial t} && \text{(d'après l'équation de Maxwell-Gauss)}
\end{aligned}$$

d'où, après simplification par μ_0, l'équation de continuité

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{\jmath} = 0$$

Conclusion. L'équation de conservation de la charge, appelée **équation de continuité**,

$$\boxed{\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{\jmath} = 0}$$

est ainsi effectivemment une conséquence des équations de Maxwell. Le fait que la charge électrique soit une grandeur conservative est donc inscrit dans ces équations.

Remarquez que c'est la contribution de Maxwell $\mu_0\,\varepsilon_0\,\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ qui assure qu'on tombe bien sur l'équation de continuité. Sans ce terme, on obtiendrait

$$\operatorname{div}\vec{\jmath} = 0$$

qui est la conservation de la charge dans l'ARQS (voir chapitre EM9), c'est-à-dire la **loi des nœuds**.