OP6-TD

Correction

OP6 — 05 Trois trous d'Young en triangle

1) Déjà, **les trois ondes sont cohérentes** car les trois sources secondaires (les trous) sont issues de la même source primaire S, parfaitement monochromatique à ω donc de longueur de cohérence temporelle infinie.

Avant de se lancer dans les calculs, rappelons la méthode générale pour traiter des interférences à N ondes (ici $N = 3$). Remarquons qu'il faut toujours faire un schéma mais il serait ici peu utile.

1. l'amplitude totale est la somme des amplitudes dues à chacune des ondes
$$\underline{a}_{\text{tot}}(M) = \underline{a}_1(M) + \underline{a}_2(M) + \underline{a}_3(M)$$
2. l'amplitude d'une onde s'écrit
$$\underline{a}_i(M) = A(M)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega\,t-\varphi_i(M))}$$
Dans cette expression on utilise que toutes les ondes ont la même pulsation (celle de S), et aussi qu'elles éclairent toutes le point M de manière identique : $A(M)$ est indépendant de la source. Cela se justifie en disant que les trous ont le même diamètre, donc laissent tous passer la même quantité de lumière (on suppose en fait que la diffraction est identique).
3. on factorise $\underline{a}_{\text{tot}}(M)$ par l'une des ondes (prenons $\underline{a}_1(M)$ ici) et on n'écrit plus les dépendances en M pour simplifier les notations
$$\underline{a}_{\text{tot}}(M) = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega\,t-\varphi_1)}\left\{1+\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_1-\varphi_2)}+\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_1-\varphi_3)}\right\}$$
4. on relie ensuite les différences de phases aux différences de marche
$$\left\{\begin{array}{rcl}\varphi_1-\varphi_2 & = & \dfrac{2\,\pi}{\lambda}\Big(\mathcal{L}(S_1M)-\mathcal{L}(S_2M)\Big)=\dfrac{2\,\pi}{\lambda}\,\delta_{12}\\ \varphi_1-\varphi_3 & = & \dfrac{2\,\pi}{\lambda}\Big(\mathcal{L}(S_1M)-\mathcal{L}(S_3M)\Big)=\dfrac{2\,\pi}{\lambda}\,\delta_{13}\end{array}\right.$$
5. il s'agit alors de calculer les différences de marche
$$\left\{\begin{array}{rcl}\delta_{12} & = & \mathcal{L}(S_1M)-\mathcal{L}(S_2M)\\ \delta_{13} & = & \mathcal{L}(S_1M)-\mathcal{L}(S_3M)\end{array}\right.$$
6. Une fois les différences de marche connues, on avance le calcul de $\underline{a}_{\text{tot}}$ puis on détermine finalement l'éclairement par
$$\mathcal{E}_{\text{tot}} = |\underline{a}_{\text{tot}}|^2$$

La méthode générale étant rappelée, on reprend à l'étape 5. Ici, les chemins optiques se calculent géométriquement car les rayons sont dans un milieu homogène.
$$\left\{\begin{array}{rcl}\delta_{12} & = & n\left(S_1M-S_2M\right)\\ \delta_{13} & = & n\left(S_1M-S_3M\right)\end{array}\right.$$
Le point M a pour coordonnées $(x,y,0)$, tandis que celles des points S_i sont données par l'énoncé (leur composante suivant z est $-D$ d'après le schéma, attention à ne pas l'oublier). On calcule
$$\begin{array}{rcl}S_1M & = & \sqrt{x^2+\left(y-\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)^2+D^2}\\ & = & \sqrt{x^2+y^2+\dfrac{a^2}{3}-\dfrac{2\,a\,y}{\sqrt{3}}+D^2}\\ & = & D\sqrt{1+\dfrac{x^2}{D^2}+\dfrac{y^2}{D^2}+\dfrac{a^2}{3\,D^2}-\dfrac{2\,a\,y}{\sqrt{3}\,D}}\\ & \approx & D\left(1+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2}{D^2}+\dfrac{y^2}{D^2}+\dfrac{a^2}{3\,D^2}-\dfrac{2\,a\,y}{\sqrt{3}\,D}\right)\right)\end{array}$$

La dernière ligne utilise que $x, y, a \ll D$ pour effectuer un développement limité à l'ordre 1 : $\sqrt{1+\varepsilon} \approx 1 + \varepsilon\,/\,2$.
On calcule de même

$$\begin{aligned}
S_2M &= \sqrt{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2 + D^2} \\
&= \sqrt{x^2 + a\,x + \frac{a^2}{4} + y^2 + \frac{a^2}{12} + \frac{a\,y}{\sqrt{3}} + D^2} \\
&= D\sqrt{1 + \frac{x^2}{D^2} + \frac{a\,x}{D^2} + \frac{a^2}{3\,D^2} + \frac{y^2}{D^2} + \frac{a\,y}{\sqrt{3}\,D^2}} \\
&\approx D\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{D^2} + \frac{y^2}{D^2} + \frac{a^2}{3\,D^2} + \frac{a\,y}{\sqrt{3}\,D^2} + \frac{a\,x}{D^2}\right)\right)
\end{aligned}$$

Puis en transformant $a \leftrightarrow -a$ dans la composante suivant x, on devine

$$S_3M \approx D\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{D^2} + \frac{y^2}{D^2} + \frac{a^2}{3\,D^2} + \frac{a\,y}{\sqrt{3}\,D^2} - \frac{a\,x}{D^2}\right)\right)$$

On poursuit le calcul en exprimant

$$\left\{\begin{aligned}
\delta_{12} &= n\,(S_1M - S_2M) &= \frac{n\,a}{2\,D}\,(-x - \sqrt{3}\,y) \\
\delta_{13} &= n\,(S_1M - S_3M) &= \frac{n\,a}{2\,D}\,(x - \sqrt{3}\,y)
\end{aligned}\right.$$

d'où on déduit les différences de phase

$$\left\{\begin{aligned}
\varphi_1 - \varphi_2 &= -\frac{\pi\,n\,a}{\lambda\,D}\,(x + \sqrt{3}\,y) \\
\varphi_1 - \varphi_3 &= \frac{\pi\,n\,a}{\lambda\,D}\,(x - \sqrt{3}\,y)
\end{aligned}\right.$$

La vibration lumineuse totale en M est donc

$$\begin{aligned}
\underline{a}_{\text{tot}} &= A\,e^{j(\omega\,t - \varphi_1)}\left\{1 + \exp\left(-j\,\frac{\pi\,n\,a}{\lambda\,D}(x + \sqrt{3}\,y)\right) + \exp\left(j\,\frac{\pi\,n\,a}{\lambda\,D}(x - \sqrt{3}\,y)\right)\right\} \\
&= A\,e^{j(\omega\,t - \varphi_1)}\left\{1 + \exp\left(-j\,\frac{\pi\,n\,a}{\lambda\,D}\,\sqrt{3}\,y\right)\left(\exp\left(-j\,\frac{\pi\,n\,a}{\lambda\,D}\,x\right) + \exp\left(+j\,\frac{\pi\,n\,a}{\lambda\,D}\,x\right)\right)\right\} \\
\underline{a}_{\text{tot}} &= A\,e^{j(\omega\,t - \varphi_1)}\left\{1 + 2\,\exp\left(-j\,\frac{\pi\,n\,a}{\lambda\,D}\,\sqrt{3}\,y\right)\cos\left(\frac{\pi\,n\,a}{\lambda\,D}\,x\right)\right\}
\end{aligned}$$

et on obtient finalement l'éclairement par

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\text{tot}} &= |\underline{a}_{\text{tot}}|^2 \\
&= \underline{a}_{\text{tot}}\,\underline{a}^*_{\text{tot}} \\
&= A^2\left(1 + 2\,\cos\left(\frac{\pi\,n\,a}{\lambda\,D}\,x\right)\exp\left(-j\,\frac{\pi\,n\,a}{\lambda\,D}\,\sqrt{3}\,y\right)\right)\left(1 + 2\,\cos\left(\frac{\pi\,n\,a}{\lambda\,D}\,x\right)\exp\left(+j\,\frac{\pi\,n\,a}{\lambda\,D}\,\sqrt{3}\,y\right)\right) \\
&= \mathcal{E}_0\left\{1 + 4\,\cos^2\left(\frac{\pi\,n\,a}{\lambda\,D}\,x\right) + 2\,\cos\left(\frac{\pi\,n\,a}{\lambda\,D}\,x\right)\left(\exp\left(+j\,\frac{\pi\,n\,a}{\lambda\,D}\,\sqrt{3}\,y\right) + \exp\left(-j\,\frac{\pi\,n\,a}{\lambda\,D}\,\sqrt{3}\,y\right)\right)\right\} \\
\mathcal{E}_{\text{tot}} &= \mathcal{E}_0\left\{1 + 4\,\cos^2\left(\frac{\pi\,n\,a}{\lambda\,D}\,x\right) + 4\,\cos\left(\frac{\pi\,n\,a}{\lambda\,D}\,x\right)\cos\left(\frac{\pi\,n\,a}{\lambda\,D}\,\sqrt{3}\,y\right)\right\}
\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{tot}} = \mathcal{E}_0\left\{1 + 4\,\cos\left(\frac{\pi\,n\,a}{\lambda\,D}\,x\right)\left(\cos\left(\frac{\pi\,n\,a}{\lambda\,D}\,x\right) + \cos\left(\frac{\pi\,n\,a}{\lambda\,D}\,\sqrt{3}\,y\right)\right)\right\}}$$

Un joli calcul s'il en est...