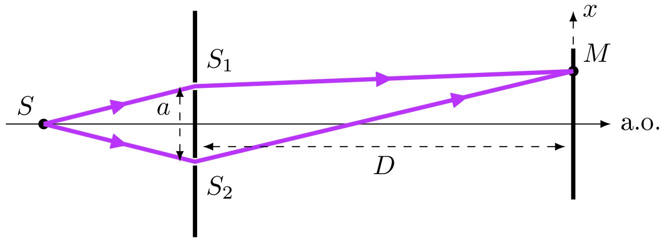
OP3-TD

Correction

OP3 – 13 Expériences avec des trous d'Young en lumière blanche

L'exercice discute par le calcul les observations que l'on ferait en élargissant progressivement le spectre de la source. On commence avec une lumière parfaitement monochromatique, puis on passe à une raie fine $\Delta\lambda \ll \lambda$ et on termine sur une source à spectre large : la lumière blanche.

1) On dessine le schéma suivant



2) Calculons la différence de marche δ.

$$\delta = \mathcal{L}(SS_2M) - \mathcal{L}(SS_1M) = \mathcal{L}(S_2M) - \mathcal{L}(S_1M)$$

car $\mathcal{L}(SS_2) = \mathcal{L}(SS_1)$ par symétrie. On poursuit en voyant que les rayons se propagent dans un milieu homogène :

$$\delta = n\left(S_2M - S_1M\right)$$

Il ne reste qu'à calculer les distances géométriques. Rappelons les coordonnées des points pour cela

$$M(x, y, 0), \qquad S_1\left(\frac{a}{2}, 0, -D\right) \qquad \text{et} \qquad S_2\left(-\frac{a}{2}, 0, -D\right).$$

On détermine alors

$$\begin{aligned} S_1M &= \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2} \\ &= \sqrt{x^2 - a\,x + \frac{a^2}{4} + y^2 + D^2} \\ &= D\sqrt{1 + \frac{x^2}{D^2} - \frac{a\,x}{D^2} + \frac{a^2}{4\,D^2} + \frac{y^2}{D^2}} \\ &\approx D\left(1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x^2}{D^2} - \frac{a\,x}{D^2} + \frac{a^2}{4\,D^2} + \frac{y^2}{D^2}\right)\right) \end{aligned}$$

où la dernière ligne utilise le développement limité $\sqrt{1+\varepsilon} \approx 1 + \varepsilon\,/\,2$, valable car $x, y, a \ll D$. La transformation $a \leftrightarrow -a$ permet de deviner directement

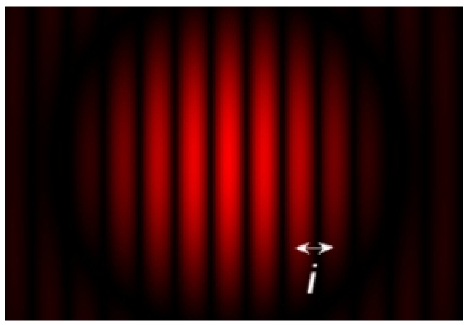
$$S_2M = D\left(1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x^2}{D^2} + \frac{a\,x}{D^2} + \frac{a^2}{4\,D^2} + \frac{y^2}{D^2}\right)\right)$$

La différence des deux conduit à la différence de marche

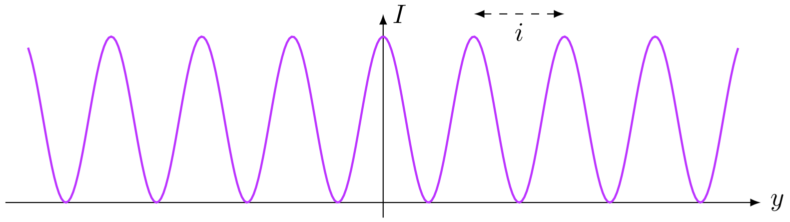
$$\boxed{\delta = \frac{n\,a\,x}{D}}$$

2) Proposons ci-contre une photo pour ce qui est observé à l'écran. La figure d'interférence occupe tout le champ d'interférence créé par la diffraction par les trous. Pour ce qui est du graphique de l'éclairement à l'écran (sans prendre en compte la diffraction), il est donné par la **formule de Fresnel**

$$I = 2\,I_0\left(1 + \cos\left(\frac{2\,\pi\,\delta}{\lambda_0}\right)\right)$$



On trace donc



L'interfrange i est la période du cosinus à l'écran, soit

$$\boxed{i = |x_{p+1} - x_p| = \frac{\lambda_0\, D}{n\, a}}$$

si x_p est la position de la frange d'ordre d'interférence p.

3) On passe à une source à raie fine. L'élargissement de la raie provoque une **perte de cohérence temporelle**, qui se traduit à l'écran par une **perte de constraste sur les bords de la figure d'interférence**, ce que l'on observe sur le graphique proposé. En rappelant que le contraste s'écrit

$$\mathcal{C} = \frac{I_{\text{max}} - I_{\text{min}}}{I_{\text{max}} + I_{\text{min}}}$$

on voit que

$$\boxed{\mathcal{C}(x=0) = 1 \qquad \text{car } I_{\text{min}} = 0 \text{ en } x = 0, \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C}(x = 23\text{ mm}) = 0 \qquad \text{car } I_{\text{max}} = I_{\text{min}} \text{ à cet endroit.}}$$

4) La source reste quasi-monochromatique à λ_0 donc on peut utiliser la formule de l'interfrange obtenue précédemment. On compte 42 interfranges en 40 mm, donc l'interfrange vaut $i = 0{,}95$ mm et ainsi

$$\boxed{\lambda_0 = \frac{n\, a\, i}{D} \approx 1140 \text{ nm.}}$$

en prenant $n = 1$. La source émet dans le **domaine infrarouge**.

5) Le **critère semi-quantitatif de brouillage des franges** permet d'estimer la largeur spectrale $\Delta\lambda$. Il s'écrit

$$|\Delta p| = \frac{1}{2}$$

à l'endroit où on perd le contraste *(c'est-à-dire qu'on a encore du constraste pour $|\Delta p| < 1/2$ mais il devient nul pour $|\Delta p| > 1/2$)*. Rappelons que Δp désigne la différence entre les ordres d'interférence en un point x de l'écran de l'onde à λ_0 (milieu de raie) et de celle à $\lambda_0 \pm \Delta\lambda/2$ (bord de raie). Connaissant la différence de marche, on calcule

$$\Delta p = p_{\lambda_0 + \Delta\lambda/2}(x) - p_{\lambda_0}(x) = \frac{n\, a\, x}{(\lambda_0 + \Delta\lambda/2)\, D} - \frac{n\, a\, x}{\lambda_0\, D} = \frac{n\, a\, x}{\lambda_0\, D} \left(\frac{1}{1 + \dfrac{\Delta\lambda}{2\, \lambda_0}} - 1 \right)$$

Un développement limité conduit à

$$\Delta p = \frac{n\, a\, x}{\lambda_0\, D} \left(1 - \frac{\Delta\lambda}{2\, \lambda_0} - 1 \right) = -\frac{n\, a\, x}{2\, \lambda_0^2\, D}\, \Delta\lambda$$

et ainsi, pour $x = x_{\text{lim}} = 20$ mm où $\mathcal{C} = 0$ pour la première fois donc $|\Delta p| = 1/2$, on a

$$\frac{1}{2} = \frac{n\, a\, x_{\text{lim}}}{2\, \lambda_0^2\, D}\, \Delta\lambda \qquad \text{soit} \qquad x_{\text{lim}} = \frac{\lambda_0^2\, D}{n\, a\, \Delta\lambda}$$

On déduit, toujours avec $n = 1$,

$$\boxed{\Delta\lambda = \frac{\lambda_0^2\, D}{n\, a\, x_{\text{lim}}} \approx 50 \text{ nm.}}$$

6) La longueur de cohérence temporelle ℓ_c d'une source vérifie

$$\ell_c = c\,\tau \approx \frac{c}{\Delta f}$$

où $\tau \approx 1\,/\,\Delta f$ est le temps de cohérence. Par ailleurs la largeur spectrale en fréquence Δf est reliée à celle en longueur d'onde par

$$\begin{aligned}
\Delta f &= f_{\text{max}} - f_{\text{min}} \\
&= f(\lambda_0 - \Delta\lambda/2) - f(\lambda_0 + \Delta\lambda/2) \\
&= \frac{c}{\lambda_0 - \Delta\lambda/2} - \frac{c}{\lambda_0 + \Delta\lambda/2} \\
&= \frac{c}{\lambda_0}\left(\frac{1}{1 - \dfrac{\Delta\lambda}{2\,\lambda_0}} - \frac{1}{1 + \dfrac{\Delta\lambda}{2\,\lambda_0}}\right) \\
&\approx c\,\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2}
\end{aligned}$$

après un développement limité. On aboutit à

$$\boxed{\ell_c = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda} \approx 20\,\mu\text{m}.}$$

Rappelons que ℓ_c donne **la taille (« l'extension ») spatiale d'un train d'onde**.

7) Les **longueurs d'onde éteintes en $x = 1$ mm sont celles qui ont un ordre d'interférence demi-entier** à cette position

$$p = k + \frac{1}{2} \qquad \text{avec} \qquad k \in \mathbb{Z} \qquad \text{soit} \qquad \frac{n\,a\,x}{\lambda\,D} = k + \frac{1}{2}$$

On calcule

$$\lambda_k = \frac{n\,a\,x}{\left(k + \dfrac{1}{2}\right)D}$$

Les longueurs d'onde λ_k dans le visible sont

$$\boxed{\lambda_1 = 800 \text{ nm} \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = 480 \text{ nm}.}$$

Les couleurs rouge (λ_1) et le bleu (λ_2) étant éteintes, on imagine qu'à l'écran la superspostion de toutes les autres couleurs du spectre visible donne une **teinte plutôt verte**.

8) Même raisonnement avec $x = 25$ mm. Les longueurs d'onde éteintes sont les

$$\lambda_k = \frac{n\,a\,x}{\left(k + \dfrac{1}{2}\right)D}$$

Celles qui sont dans le visible sont

$$\boxed{\lambda_{37} = 800 \text{ nm}, \qquad \lambda_{38} = 780 \text{ nm}, \qquad ..., \qquad \text{jusque} \qquad \lambda_{73} = 408 \text{ nm} \qquad \text{et} \qquad \lambda_{74} = 402 \text{ nm}.}$$

Il y a donc 38 longueurs d'onde éteintes à cet endroit : qualitativement, il y a un peu de toutes les couleurs (on a à l'écran une sensation de blanc, un peu pastel en pratique) mais avec quelques-unes manquantes. Le spectre est dit **cannelé** et le blanc résultant est qualifié de blanc **d'ordre supérieur**. On donne ci-dessous une image du spectre (et non de ce qu'on voit à l'écran attention !)