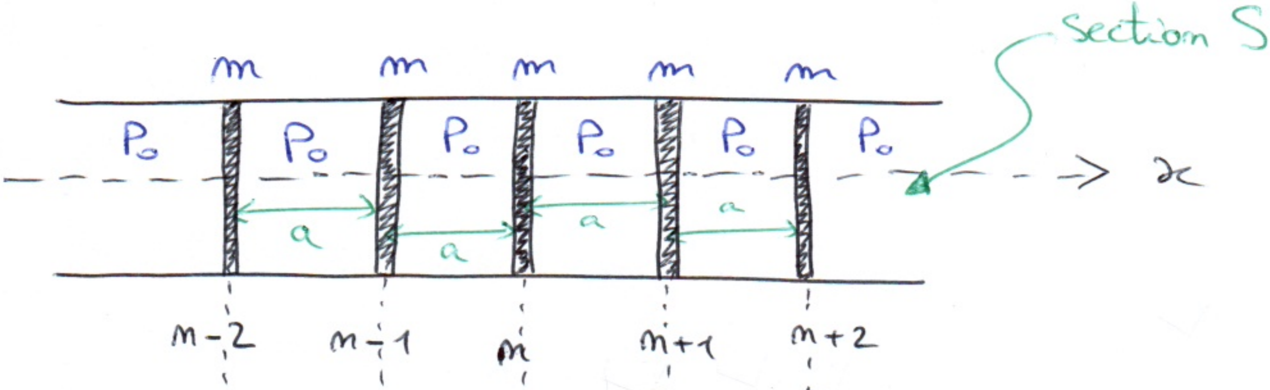
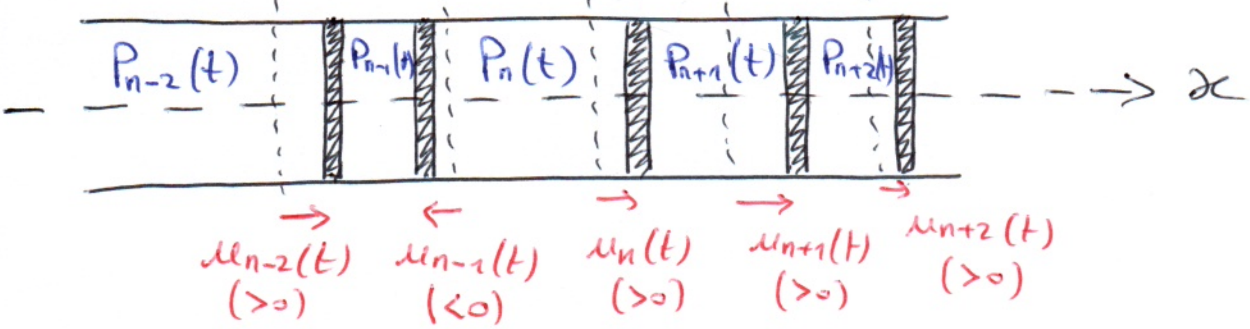
O2-18 Onde thermo-mécanique

1) À l'équilibre,



Hors équilibre,



2) Le volume du gaz de pression $P_n(t)$ est $V_n = S(a+u_n-u_{n-1})$

Les transformations étant isentropiques [car réversibles (pas de frottements) et adiabatiques (perturbations rapides, les échanges thermiques n'ont pas le temps de se faire)], on peut appliquer la loi de Laplace sur ces gaz parfaits :

$$PV^\gamma = Cte.$$

On évalue la constante à l'équilibre : $P_0(Sa)^\gamma = Cte.$

d'où

$$P_n(t)\, V_n^\gamma(t) = P_0\, S^\gamma a^\gamma$$

et donc

$$P_n(t) = P_0 \frac{\cancel{S^\gamma} a^\gamma}{\cancel{S^\gamma}(a + u_n - u_{n-1})^\gamma}$$

$$= \frac{P_0}{\left(1 + \frac{u_n - u_{n-1}}{a}\right)^\gamma}$$

$\frac{1}{(1+\varepsilon)^\gamma} \sim 1 - \gamma\varepsilon$ pour $\varepsilon \ll 1$

$$\simeq P_0 \left(1 - \frac{\gamma}{a}(u_n - u_{n-1})\right)$$

Finalement,

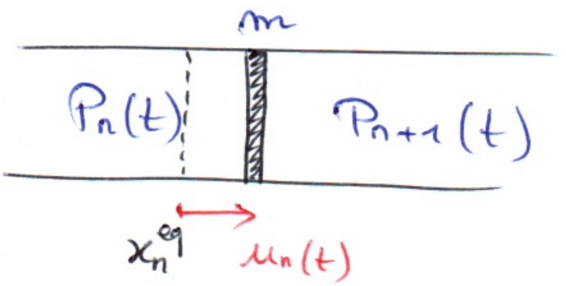
$$\boxed{P_n(t) = P_0 \left(1 - \frac{\gamma}{a}\left(u_n(t) - u_{n-1}(t)\right)\right)}$$

3) <u>Système</u> : le piston n (masse m)

<u>Ref</u> : le tuyau cylindrique, supposé galiléen

<u>BdF</u> :
- * poids et réaction du tuyau se compensent
- * pas de frottement
- * pression à gauche : $\vec{F_g} = P_n(t)\, S\, \vec{u_x}$
- * ——— droite : $\vec{F_d} = -P_{n+1}(t)\, S\, \vec{u_x}$

(schéma :



)

Le TCM, directement projeté sur (Ox), conduit à

$$m\ddot{x}_n = \left(P_n(t) - P_{n+1}(t)\right)S$$

Or $x_n = na + u_n$ donc $\ddot{x}_n = \ddot{u}_n$ et ainsi

$$\ddot{u}_n = -\frac{S}{m}P_0\frac{\gamma}{a}\left(u_n - u_{n-1} - (u_{n+1} - u_n)\right)$$

soit
$$\boxed{\ddot{u}_n = \gamma\frac{P_0 S}{ma}\left(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n\right)}$$

Équations linéaires, du 2e ordre, couplées entre u_{n+1}, u_{n-1} et u_n.

4] $$\begin{cases} u(x+a,t) = u(x,t) + a\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{a^2}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x-a,t) = u(x,t) - a\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{a^2}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{cases}$$

d'où
$$u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n = u(x+a,t) + u(x-a,t) - 2u(x,t)$$
$$= a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ seulement.}$$

5] Par ailleurs, $\ddot{u}_n = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ d'où

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \gamma\frac{P_0 S}{m}a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

soit

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{m}{P_0 S a \gamma} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0}$$

Équation de d'Alembert caractéristique d'un phénomène de propagation à la célérité c

avec $$\boxed{c = \sqrt{\frac{P_0 S a \gamma}{m}}}$$

<u>Commentaire</u> : * si $m \nearrow$, $c \searrow$: c'est un <u>effet d'inertie</u>. Plus les pistons sont lourds, plus ils sont "durs à mettre en mouvement" donc la propagation de proche en proche se fait plus lentement.

* Pour un gaz parfait, le coefficient de compressibilité isentropique se calcule comme $\chi_S = \frac{1}{\gamma P_0}$ (voir chapitre O4).

donc $c = \sqrt{\frac{Sa}{m} \frac{1}{\chi_S}}$ et si $\chi_S \nearrow$, alors $c \searrow$.

Plus le gaz est compressible ($\chi_S \nearrow$), c'est-à-dire "mou", plus l'onde va lentement. C'est un <u>effet de rigidité</u>.