O2-TD

Correction

O2 — 15 Tsunami encore

1) Tout d'abord, le terme $\underline{A}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(\omega\,t-k_1\,x)}$ correspond à une onde qui vit dans le milieu $x<0$ et qui se propage vers les x croissants : c'est **l'onde incidente**. Le terme $\underline{B}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(\omega\,t+k_1\,x)}$ correspond à une onde qui vit aussi dans le milieu $x<0$ mais qui se propage vers les x décroissants : c'est **l'onde réfléchie**. Enfin, le terme $\underline{C}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(\omega\,t-k_2\,x)}$ correspond à une onde qui vit dans le milieu $x>0$ et qui se propage vers les x croissants : c'est **l'onde transmise**. On adopte alors les notations suivantes :

$$\begin{cases} \underline{\zeta}_i(x,t)=\underline{A}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(\omega\,t-k_1\,x)} \\ \underline{\zeta}_r(x,t)=\underline{B}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(\omega\,t+k_1\,x)} \\ \underline{\zeta}_t(x,t)=\underline{C}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(\omega\,t-k_2\,x)} \end{cases}$$

Ensuite, les champs de vitesse associés s'obtiennent à partir d'une équation qui couple ζ et v. Dans l'exercice O2-14, nous avons déterminé deux telles équations :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}=-h_0\,\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial v}{\partial t}=-g\,\frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

Par théorème de superposition, chacune des trois ondes (incidente, réfléchie et transmise) est individuellement solution de l'équation d'onde ainsi que de ces deux équations de couplage.

L'une ou l'autre sont ici équivalentes pour conclure. Considérons pour l'exemple l'équation de gauche, et commençons par étudier l'onde incidente $\underline{\zeta}_i=\underline{A}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(\omega\,t-k_1\,x)}$ qui évolue dans un milieu de hauteur $h_0=h_1$. On note $\underline{v}_i$ l'onde de vitesse associée. On a

$$\frac{\partial \underline{\zeta}_i}{\partial t}=-h_1\,\frac{\partial \underline{v}_i}{\partial x} \qquad \text{soit} \qquad \mathrm{j}\,\omega\,\underline{A}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(\omega\,t-k_1\,x)}=-h_1\,\frac{\partial \underline{v}_i}{\partial x}$$

En divisant par $-h_1$ puis en intégrant partiellement par rapport à x cette équation, on obtient

$$\underline{v}_i=\frac{\mathrm{j}\,\omega}{\mathrm{j}\,k_1\,h_1}\,\underline{A}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(\omega\,t-k_1\,x)}+\underline{f}(t)$$

La constante d'intégration $\underline{f}(t)$ est une constante vis-à-vis de la variable d'intégration x, mais elle peut dépendre de t a priori.

Le champ de vitesse $\underline{f}(t)$ n'est pas une onde (il ne dépend que de t et pas de x). Cela correspondrait donc à un champ de vitesse complètement homogène (indépendant de x donc existant identiquement en $x\to-\infty$ et $x\to\infty$). Un tel champ n'est pas physique. On déduit donc dans ce problème d'onde que $\underline{f}(t)=0$. Par conséquent,

$$\boxed{\underline{v}_i(x,t)=\frac{\omega}{k_1\,h_1}\,\underline{A}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(\omega\,t-k_1\,x)}}$$

On déduit de la même manière, en remplaçant respectivement $k_1\mapsto -k_1$ pour l'onde réfléchie $\underline{\zeta}_r$, et $k_1\mapsto k_2$ ainsi que $h_1\mapsto h_2$ pour l'onde transmise $\underline{\zeta}_t$, que

$$\boxed{\underline{v}_r(x,t)=-\frac{\omega}{k_1\,h_1}\,\underline{B}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(\omega\,t+k_1\,x)} \qquad \text{et} \qquad \underline{v}_t(x,t)=\frac{\omega}{k_2\,h_2}\,\underline{C}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(\omega\,t-k_2\,x)}}$$

Concluons en donnant le champ de vitesse dans chaque demi-espace. Par théorème de superposition, dans le demi-espace de gauche $x<0$, on a $\underline{v}_g=\underline{v}_i+\underline{v}_r$ et pour celui de droite $x>0$, on a $\underline{v}_d=\underline{v}_t$:

$$\boxed{\underline{v}_g(x,t)=\frac{\omega}{k_1\,h_1}\,\left(\underline{A}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,k_1\,x}-\underline{B}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,k_1\,x}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\,t} \qquad \text{et} \qquad \underline{v}_d(x,t)=\frac{\omega}{k_2\,h_2}\,\underline{C}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(\omega\,t-k_2\,x)}}$$

***Attention** à ne pas tenir des arguments fallacieux du type « l'onde réfléchie va vers la gauche donc le champ de vitesse résultant est $\underline{v}_i-\underline{v}_r$ ». Le bon raisonnement est « les équations sont linéaires donc on a le théorème de superposition donc la solution générale est la **somme** (toujours ! jamais de signe $-$) des solutions $\underline{v}_i+\underline{v}_r$ ».*

6) Évidemment, le **niveau d'eau est continu** en $x=0$: on a donc à cet endroit

$$\underline{\zeta}(x=0^-,t)=\underline{\zeta}(x=0^+,t) \qquad \text{pour tout } t,$$

donc ici

$$\underline{\zeta}_g(x=0,t) = \underline{\zeta}_d(x=0,t) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\underline{\zeta}_i(x=0,t) + \underline{\zeta}_r(x=0,t) = \underline{\zeta}_t(x=0,t)} \quad (*)$$

Toujours par théorème de superposition, l'onde à gauche est $\underline{\zeta}_i + \underline{\zeta}_r$ *et non* $\underline{\zeta}_i - \underline{\zeta}_r$ *« car l'onde réfléchie va dans l'autre sens », ce qui n'est pas un argument vrai.*

Par ailleurs, la **continuité du débit volumique** en $x = 0$ impose

$$D_v(x=0^-,t) = D_v(x=0^+,t)$$

L'idée de cet argument est de dire que le volume d'eau qui traverse l'interface $x = 0$ de la gauche vers la droite ne disparaît pas à la traversée : forcément tout le volume qui arrive de la gauche $D_v(x = 0^-, t)$ passe à droite $D_v(x = 0^+, t)$. Or $D_v = v\,S$ car le champ de vitesse est uniforme sur un plan $x = \text{Cste}$ donc ici

$$\begin{cases} D_v(x=0^-,t) &=& L\,h_1\,\underline{v}(x=0^-,t) &=& L\,h_1\,\underline{v}_g(x=0,t) \\ D_v(x=0^+,t) &=& L\,h_2\,\underline{v}(x=0^+,t) &=& L\,h_2\,\underline{v}_d(x=0,t) \end{cases}$$

La continuité du débit impose donc, puisque $\underline{v}_g = \underline{v}_i + \underline{v}_r$ et $\underline{v}_d = \underline{v}_t$,

$$\boxed{h_1\left(\underline{v}_i(x=0,t) + \underline{v}_r(x=0,t)\right) = h_2\,\underline{v}_t(x=0,t)} \quad (**)$$

3) Il reste à traduire les deux équations de continuité $(*)$ et $(**)$ connaissant les expressions des six champs $\underline{\zeta}_i$, $\underline{\zeta}_r$, $\underline{\zeta}_t$ et $\underline{v}_i$, $\underline{v}_r$ et $\underline{v}_t$. Elles s'écrivent, après division par $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega\,t}$,

$$\begin{cases} (*) & \underline{A} + \underline{B} &=& \underline{C} \\ (**) & \dfrac{\omega}{k_1}\left(\underline{A} - \underline{B}\right) &=& \dfrac{\omega}{k_2}\,\underline{C} \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} (*) & \underline{A} + \underline{B} &=& \underline{C} \\ (**) & \underline{A} - \underline{B} &=& \dfrac{k_1}{k_2}\,\underline{C} \end{cases}$$

L'amplitude de la vague transmise étant $\underline{C}$ et celle de la vague incidente $\underline{A}$, on définit le coefficient multiplicatif $\underline{t}$ par

$$\underline{t} = \frac{\underline{C}}{\underline{A}}$$

En calculant $(*) + (**)$, on obtient

$$2\,\underline{A} = \left(1 + \frac{k_1}{k_2}\right)\underline{C} \qquad \text{soit} \qquad \frac{\underline{C}}{\underline{A}} = \frac{2}{1 + \dfrac{k_1}{k_2}}$$

d'où on conclut

$$\boxed{\underline{t} = \frac{2}{1 + \dfrac{k_1}{k_2}} = \frac{2\,k_2}{k_2 + k_1}}$$

Pour conclure, il est préférable de poursuivre un peu le calcul en se rappelant que ζ et v vérifient une équation de d'Alembert donc ω et k vérifient la relation de dispersion $\omega = c\,k$ avec $c = \sqrt{g\,h}$ la célérité des vagues. Plus précisément ici

$$\omega = \sqrt{g\,h_1}\,k_1 \qquad \text{et} \qquad \omega = \sqrt{g\,h_2}\,k_2$$

d'où

$$\frac{k_1}{k_2} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}$$

et donc

$$\boxed{\underline{t} = \frac{2}{1 + \sqrt{\dfrac{h_2}{h_1}}} = \frac{2\sqrt{h_1}}{\sqrt{h_2} + \sqrt{h_1}}}$$

Et puisque $h_2 < h_1$, on a $\underline{t} > 1$. **La hauteur de la vague croît** à la traversée de l'interface, c'est-à-dire à l'arrivée sur le plateau continental.

Pour l'exemple, si on prend $h_2 \approx 200$ *m la profondeur du plateau continental et* $h_1 \approx 4$ *km celle de la plaine abyssale, on déduit* $\underline{t} \approx 1{,}6$*, soit une augmentation de 60%.*