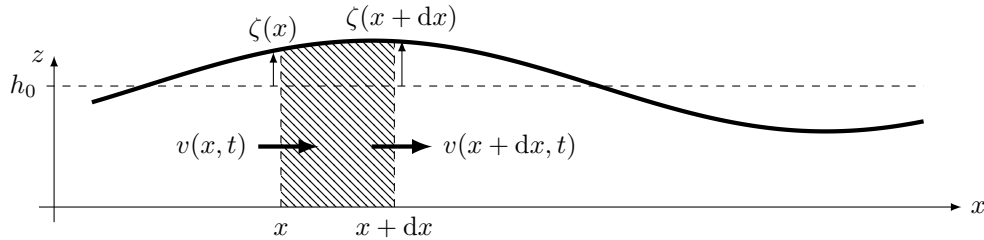


Correction

O2 – 14 Tsunami

1) Commençons par un schéma en coupe.



Dressons un bilan de masse entre t et $t + dt$ sur le système hachuré entre x et $x + dx$. On peut le faire de deux manières (évidemment équivalentes) : soit « à la H1 » (à l'échelle mésoscopique), soit « à la H4 » (à l'échelle macroscopique).

Méthode 1. Bilan mésoscopique. (C'est le bilan le plus pertinent ici puisqu'on travaille avec un système élémentaire de taille mésoscopique dx .) Dressons le bilan de masse en calculant la variation de masse de notre système entre t et $t + dt$, selon le « principe du porte-monnaie ». D'une part, on peut déjà dire

$$d^2m = \text{« la masse à } t + dt \text{ »} - \text{« la masse à } t \text{ »} = dm(t + dt) - dm(t)$$

or la masse s'obtient à partir de la masse volumique ρ constante et du volume $dV(t) = L h(x, t) dx$:

$$dm(t) = \rho dV(t) = \rho L (h_0 + \zeta(x, t)) dx$$

Question : doit-on mettre $\zeta(x, t)$ ou $\zeta(x + dx, t)$ dans le volume ? Réponse : ici, puisqu'on multiplie ensuite par dx , mettre $\zeta(x, t)$ ou $\zeta(x + dx, t)$ revient au même à l'ordre 1 auquel on travaille, car $\zeta(x + dx, t) dx \approx \zeta(x, t) dx + \mathcal{O}(dx^2)$. En d'autres termes, s'il y a déjà du dx en dehors de ζ , ce n'est pas la peine d'en mettre aussi dedans : ce serait une correction d'ordre 2.

De manière identique évidemment, on a aussi

$$dm(t + dt) = \rho L (h_0 + \zeta(x, t + dt)) dx$$

d'où

$$d^2m = \rho L (\zeta(x, t + dt) - \zeta(x, t)) dx = \rho L \frac{\partial \zeta}{\partial t} dt dx \quad (1)$$

Et d'autre part, puisque la masse est une grandeur conservative, il ne peut pas y avoir création ou annihilation de masse. La variation de masse du système ne peut être due qu'à des échanges de masse avec l'extérieur. Par conséquent,

$$\begin{aligned} d^2m &= + \text{« la masse qui est entrée dans le système à travers la surface en } x \text{ entre } t \text{ et } t + dt \text{ »} \\ &\quad - \text{« la masse qui est sortie du système à travers la surface en } x + dx \text{ entre } t \text{ et } t + dt \text{ »} \\ &= dm_e - dm_s \end{aligned}$$

On exprime ensuite dm_e et dm_s à l'aide des débits massiques en x et en $x + dx$:

$$dm_e = D_m(x, t) dt = \left(\iint_x \rho \vec{v}(x, t) \cdot d\vec{S} \right) dt = \rho v(x, t) L (h_0 + \zeta(x, t)) dt$$

Pour calculer le flux, on a utilisé que $\vec{v} = v \vec{e}_x$, que $d\vec{S} = dS \vec{e}_x$ (le vecteur $d\vec{S}$ est orthogonal à la surface qui l'engendre), que $v(x, t)$ est constant que la surface en x , et que la surface d'intégration est $S(x, t) = L h(x, t) = L (h_0 + \zeta(x, t))$.

De manière identique,

$$dm_s = \rho v(x + dx, t) L (h_0 + \zeta(x + dx, t)) dt$$

et on déduit alors

$$\begin{aligned}
 d^2m &= \rho \left(v(x, t) L (h_0 + \zeta(x, t)) - v(x + dx, t) L (h_0 + \zeta(x + dx, t)) \right) dt \\
 &= -\rho L \frac{\partial(v(h_0 + \zeta))}{\partial x} dx dt \\
 &= -\rho L h_0 \frac{\partial v}{\partial x} dx dt - \rho L \frac{\partial(v \zeta)}{\partial x} dx dt \\
 d^2m &\approx -\rho L h_0 \frac{\partial v}{\partial x} dx dt \quad (2) \quad \text{à l'ordre 1,}
 \end{aligned}$$

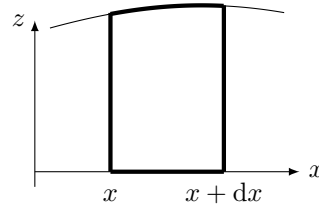
car puisque v et ζ sont d'ordre 1, leur produit est d'ordre 2 donc on le néglige en suivant l'énoncé. Nous pouvons pour conclure identifier les deux expressions de d^2m (1) et (2) :

$$\rho L \frac{\partial \zeta}{\partial t} dt dx = -\rho L h_0 \frac{\partial v}{\partial x} dx dt \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -h_0 \frac{\partial v}{\partial x}} \quad (*)$$

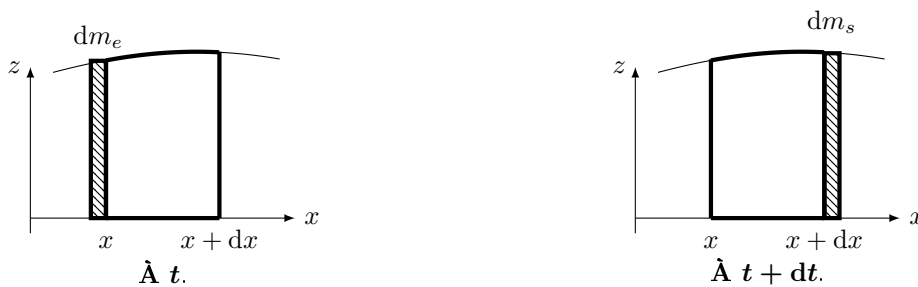
qui est bien l'équation demandée.

Deuxième méthode. Bilan macroscopique. (*Insistons sur le fait que les deux méthodes sont équivalentes, et donc autant valables l'une que l'autre. Pour répondre à la question de l'exercice, une seule des deux méthodes est bien sûr suffisante, et on peut choisir celle que l'on préfère.*) Proposons également une approche différente, qui exploite le caractère ouvert du système.

1) Système ouvert. C'est le système hachuré précédent, qu'on met en gras ci-dessous.



2) Système fermé. C'est un système à une entrée et une sortie, donc fermer le système ne pose pas de difficultés : à t , on ajoute au système ouvert la petite masse dm_e qui rentre dans le système ouvert entre t et $t + dt$. À $t + dt$, on ajoute au système ouvert la petite masse dm_s qui sort du système ouvert entre t et $t + dt$. En dessin :



3) Calcul de la variation de masse du système fermé. Notons M_f la masse du système fermé, et M_o celle du système ouvert. On calcule, en utilisant l'extensivité de la masse

$$\begin{aligned}
 dM_f &= M_f(t + dt) - M_f(t) \\
 &= M_o(t + dt) + dm_s - M_o(t) - dm_e \\
 &= \frac{dM_o}{dt} dt + dm_s - dm_e
 \end{aligned}$$

or $M_o = \ll \text{masse volumique} \times \text{volume} \gg = \rho L (h_0 + \zeta(x, t)) dx$ et on calcule comme précédemment

$$\begin{aligned}
 dm_s &= D_m(x + dx) dt \\
 &= \rho v(x + dx, t) (h_0 + \zeta(x + dx, t)) L dt \\
 \text{et} \quad dm_e &= D_m(x) dt \\
 &= \rho v(x, t) (h_0 + \zeta(x, t)) L dt
 \end{aligned}$$

d'où

$$dM_f = \rho L \frac{\partial \zeta}{\partial t} dx dt + \rho L \frac{\partial(v(h_0 + \zeta))}{\partial x} dx dt$$

Au premier ordre, le second terme se restreint à

$$dM_f = \rho L \frac{\partial \zeta}{\partial t} dx dt + \rho L h_0 \frac{\partial v}{\partial x} dx dt$$

4) Théorème : la masse d'un système fermé est constante. Il reste à traduire que la masse M_f ne varie pas car c'est la masse d'un système fermé, donc

$$dM_f = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -h_0 \frac{\partial v}{\partial x}} \quad (*)$$

On a bien sûr retrouvé la même équation.

2) On commence par calculer que, puisque $\vec{v} = v(x, t) \vec{e}_x$, on a

$$\left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v} = v \frac{\partial v}{\partial x} \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} \vec{e}_x$$

La projection de l'équation d'Euler sur l'axe z vertical ascendant donne ainsi

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g \quad \text{soit} \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$$

L'intégration partielle par rapport à z conduit à

$$P = -\rho g z + f(x, y, t)$$

On intègre ici par rapport à z donc la « constante d'intégration », qui est une constante par rapport à la variable d'intégration c'est-à-dire z , peut ici dépendre des autres variables x, y et t .

La projection de l'équation d'Euler sur l'axe y donne quant à elle

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

En utilisant notre expression de P déjà déterminée grâce à la première projection, on déduit

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

donc f est **indépendante de y** et finalement

$$\boxed{P = -\rho g z + f(x, t)}$$

Il reste à déterminer $f(x, t)$. Pour cela, on peut utiliser que par continuité de la pression aux interfaces, $P = P_0$ au contact avec l'atmosphère, ici en $z = h_0 + \zeta(x, t)$. Cette condition aux limites s'écrit

$$P_0 = -\rho g (h_0 + \zeta(x, t)) + f(x, t) \quad \text{soit} \quad \boxed{f(x, t) = P_0 + \rho g (h_0 + \zeta(x, t))}$$

qui permet de conclure

$$\boxed{P(x, z, t) = P_0 + \rho g (h_0 + \zeta(x, t) - z)}$$

Notons qu'écrire $P = P_0$ à l'interface air/eau suppose de négliger les effets de capillarité, comme nous l'avons discuté au TP 4. C'est valable car le rayon de courbure des vagues est de l'ordre du mètre, la correction de la pression γ/R avec γ la tension de surface est donc négligeable.

3) Comme nous l'avons déjà dit, l'accélération convective se réduit ici à $v \partial v / \partial x \vec{e}_x$, qui est du second ordre en v . À l'ordre 1, ce terme est ainsi négligeable. La projection de l'équation d'Euler sur l'axe x est ainsi

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x}$$

Connaissant l'expression de P , on déduit

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}} \quad (**)$$

4) Les deux équations (*) et (**) couplent les deux champs v et ζ . Il nous faut découpler ces équations pour obtenir les équations qui régissent individuellement v et ζ .

Pour ζ . Dans un premier temps, pour obtenir l'équation sur ζ , on calcule indépendamment

$$\frac{\partial(*)}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial(**)}{\partial x}$$

On obtient respectivement

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -h_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = -g \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$$

Or d'après le théorème de Schwarz, on a

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x}$$

donc on déduit

$$-\frac{1}{h_0} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -g \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{1}{g h_0} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 0}$$

On reconnaît une **équation de d'Alembert caractéristique d'un phénomène de propagation à la célérité**

$$\boxed{c = \sqrt{g h_0}}$$

Pour v . Dans un second temps, on calcule

$$\frac{\partial(*)}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial(**)}{\partial t}$$

On obtient respectivement

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial t} = -h_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -g \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t \partial x}$$

Or d'après le théorème de Schwarz, on a

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t \partial x}$$

donc on déduit

$$-\frac{1}{g} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -h_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{g h_0} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0}$$

On reconnaît une **équation de d'Alembert caractéristique d'un phénomène de propagation à la célérité**

$$\boxed{c = \sqrt{g h_0}}$$

*Dans tous les problèmes d'onde **linéaires** (on ne verra pas d'équation d'onde non linéaire en prépa), on peut toujours identifier deux grandeurs couplées (ici ζ et v , dans un câble coaxial u et i , sur une corde y et T , pour une onde sonore \vec{v} et p , pour une onde électromagnétique \vec{E} et \vec{B} ,...). Dans ces cas, les deux grandeurs vérifient alors toujours la même équation d'onde et se propagent avec la même célérité. Cela est dû au caractère linéaire des équations qui couplent les grandeurs. En pratique, on se contentera donc toujours de déterminer une seule des équations d'onde, puisqu'on sait que l'autre grandeur vérifie exactement la même équation.*