O1-TD

Correction

O1 — 02 Relation de dispersion (1)

1) On considère l'onde progressive harmonique en notation complexe $\underline{\psi}(x,t) = \underline{\psi_0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega\,t - k\,x)}$.
En remettant cette onde dans l'équation d'onde donnée par l'énoncé, on calcule

$$(\mathrm{j}\,\omega)^2\,\underline{\psi}(x,t) = c^2\,(-\mathrm{j}\,k)^2\,\underline{\psi}(x,t) - \gamma\,(-\mathrm{j}\,k)^4\,\underline{\psi}(x,t)$$

soit, puisque $\underline{\psi}(x,t)$ est non identiquement nulle,

$$\boxed{\omega^2 = c^2\,k^2 + \gamma\,k^4}$$

C'est la **relation de dispersion** de l'équation d'onde.

2) On cherche k. En posant $X = k^2$, la relation de dispersion s'identifie comme un polynôme d'ordre 2 en X

$$\gamma\,X^2 + c^2\,X - \omega^2 = 0$$

Le discriminant de ce polynôme est

$$\Delta = c^4 + 4\,\gamma\,\omega^2$$

Il est toujours positif de sorte qu'il y a deux racines réelles distinctes

$$X_{1,2} = -\frac{c^2}{2\,\gamma} \pm \frac{\sqrt{c^4 + 4\,\gamma\,\omega^2}}{2\,\gamma} = \frac{c^2}{2\,\gamma}\left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\,\gamma\,\omega^2}{c^4}}\right)$$

Ici, on peut poursuivre le calcul par un développement limité. Si

$$\frac{4\,\gamma\,\omega^2}{c^4} \ll 1 \qquad \text{donc si} \qquad \boxed{\gamma \ll \frac{c^4}{4\,\omega^2} = \gamma_{\text{lim}}}$$

alors, en utilisant que $\sqrt{1+x} \underset{x,0}{\sim} 1 + x\,/\,2 - x^2\,/\,8 + o(x)$, on calcule

$$X_{1,2} \approx \frac{c^2}{2\,\gamma}\left(-1 \pm \left(1 + \frac{2\,\gamma\,\omega^2}{c^4} - \frac{2\,\gamma^2\,\omega^4}{c^8}\right)\right)$$

*Il faut mener le développement limité à l'ordre 2 car l'ordre 1 conduit à $k = \omega\,/\,c$, qui est d'ordre 0 en γ ; or l'énoncé précise bien « au premier ordre **non nul** en γ ».*

Puisque $X = k^2$, la racine physique est celle qui est positive. On conclut

$$k^2 \approx \frac{c^2}{2\,\gamma} \times \left(\frac{2\,\gamma\,\omega^2}{c^4} - \frac{2\,\gamma^2\,\omega^4}{c^8}\right) = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\gamma\,\omega^4}{c^6} = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\gamma\,\omega^2}{c^4}\right)$$

puis on poursuit en prenant la racine pour obtenir k ($\gamma \ll \gamma_{\text{lim}}$ donc la racine est bien positive) :

$$k = \pm\,\frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\gamma\,\omega^2}{c^4}}$$

Un deuxième développement limité conduit à

$$\boxed{k \approx \pm\,\frac{\omega}{c}\left(1 - \frac{\gamma\,\omega^2}{2\,c^4}\right)}$$

Le $\pm$ correspond respectivement aux ondes qui se propagent vers les x croissants et à celles qui se propagent vers les x décroissants.

3) La vitesse de phase est par définition

$$v_\varphi \equiv \frac{\omega}{k} = \frac{c}{1 - \dfrac{\gamma\,\omega^2}{2\,c^4}} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{v_\varphi \approx c\left(1 + \frac{\gamma\,\omega^2}{2\,c^4}\right)}$$

où on utilise encore un développement limité $1/(1+x) \underset{x,0}{\sim} 1 - x$. La vitesse de phase v_φ dépend donc de ω : l'onde **se disperse lors de la propagation** (voir chapitre O5).