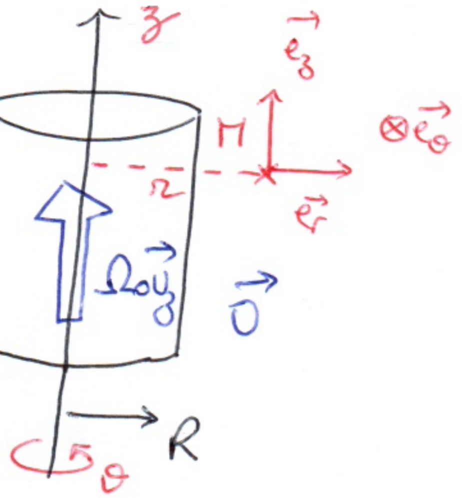
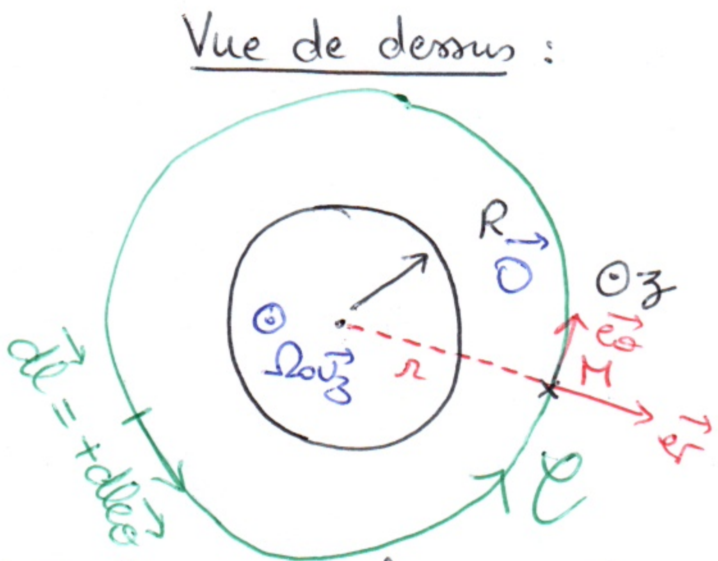
H3-14 Surface libre du tourbillon de Rankine

1) On commence par un schéma, en coordonnées cylindriques





Le théorème de Stokes, à appliquer au champ de vitesse, s'écrit

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{v}\cdot\vec{dl} = \iint_{\mathcal{S} \text{ qui repose sur } \mathcal{C}} \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{v}\cdot\vec{dS}$$

Le champ de vitesse étant ici orthoradial, (l'énoncé donne $\vec{v} = v(r)\vec{e_\theta}$), on a l'idée d'appliquer ce théorème sur un cercle.

Rq Il y a une analogie à faire avec un théorème d'Ampère, $\oint \vec{B}\cdot\vec{dl}$ = qqch de connu ...

Sur le cercle $\mathcal{C}$ (orienté ! comme dans le théorème d'Ampère !) on calcule

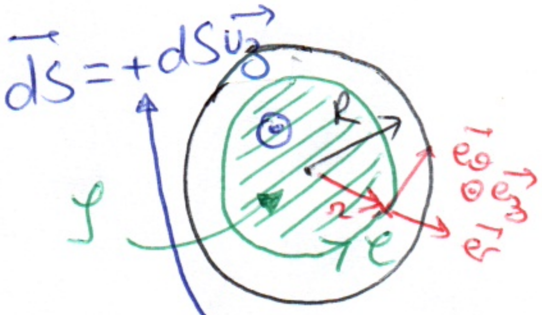
$$\oint \vec{v}\cdot\vec{dl} = \oint \underbrace{v(r)}_{\text{constant car } r \text{ l'est sur le cercle}}\cancel{\vec{e_\theta}}\cdot dl\,\cancel{\vec{e_\theta}} = v(r)\,2\pi r$$

Par ailleurs,

$$\iint \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{v} \cdot \vec{dS} = 2 \iint \vec{\Omega} \cdot \vec{dS} \quad \text{car } \vec{\Omega} \equiv \frac{1}{2}\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{v}$$

par définition.

- <u>si $r < R$</u> : dans $\mathcal{S}$, $\vec{\Omega} = \Omega_0 \vec{u_z}$, alors



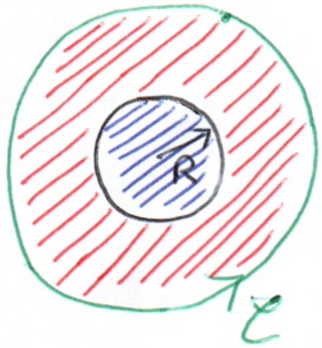
règle du pouce de la main droite, à partir de l'orientation de $\mathcal{C}$

$$2\iint \vec{\Omega}\cdot\vec{dS} = 2\iint \Omega_0 \cancel{\vec{u_z}} \cdot dS \cancel{\vec{u_z}}$$

$$= 2\Omega_0 \iint dS$$

$$= 2\pi r^2 \Omega_0$$

- <u>si $r > R$</u> :



$\vec{0}$ hors du vortex

$$\underbrace{\iint \vec{\Omega}\cdot\vec{dS}}_{\text{rouge+bleu}} = \underbrace{\iint \vec{\Omega}\cdot\vec{dS}}_{\text{bleu}} + \underbrace{\iint \vec{\Omega}\cdot\vec{dS}}_{\text{rouge}}$$

(= à l'intérieur du cercle vert)

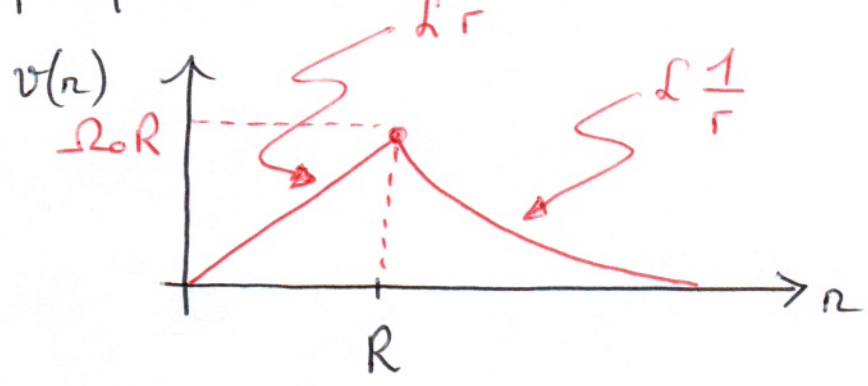
$$= \Omega_0 \iint_{\text{bleu}} dS = \Omega_0 \pi R^2$$

Finalement, par théorème de Stokes

$$\oint \vec{v}\cdot\vec{dl} = 2\pi r\, v(r) = \begin{cases} 2\pi r^2 \Omega_0 & \text{si } r < R \\ 2\pi R^2 \Omega_0 & \text{si } r > R \end{cases}$$

d'où $$\boxed{v(r) = \begin{cases} \Omega_0 r & \text{si } r < R \\ \dfrac{R^2 \Omega_0}{r} & \text{si } r > R \end{cases}}$$

Graphiquement



Rq Question difficile, qui n'a d'intérêt que si on perçoit l'analogie du calcul avec celui du champ $\vec{B}$ engendré par un fil infini cylindrique de rayon R (voir début du chapitre EM5).

2) Comme toujours avec ce genre de calcul intégral, il existe aussi une approche locale équivalente (l'équivalence se démontrant par le théorème de Stokes justement ...).

Rq idem en magnétostatique : on raisonne par le théorème d'Ampère, ou par l'équation de Maxwell-Ampère

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I_{\text{enlacé}} \quad \text{ou} \quad \vec{\text{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

On se propose ici de retrouver les expressions de $v(r)$ à partir de

$$\vec{\text{rot}}\, \vec{v} \equiv 2 \vec{\Omega} .$$

Déjà, puisque $\vec{v} = v(r)\vec{e_\theta}$, on a

$$\vec{rot}\,\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial(r\,v(r))}{\partial r}\vec{e_z}$$

Assurez-vous de comprendre pourquoi tous les autres termes sont nuls
$v_r = v_z = 0$
et $v_\theta = v(r, \cancel{\theta}, \cancel{z})$

d'où ensuite

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(rv\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } r>R \\ 2\Omega_0 & \text{si } r<R \end{cases}$$

après projection de $\vec{rot}\,\vec{v} = 2\vec{\Omega}$ sur $\vec{e_z}$.

v est une fonction d'une seule variable

d'où $rv = A$ (une constante) si $r>R$

donc $v = \frac{A}{r}$

et $rv = \Omega_0 r^2 + B$ si $r<R$

soit $v(r) = \Omega_0 r + \frac{B}{r}$.

On détermine les constantes d'intégration A et B par des conditions aux limites.

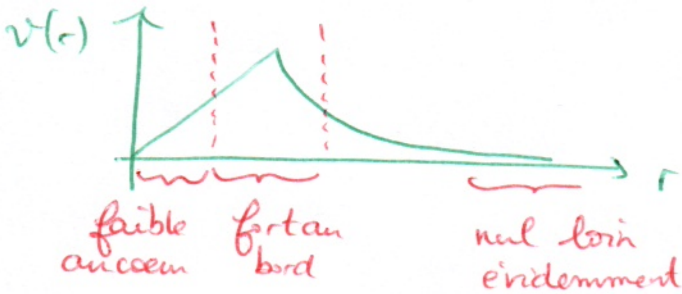
Déjà, $v(r) \cancel{\xrightarrow[r\to 0]{}} +\infty$ donc $B = 0$ forcément.
(le champ de vitesse ne diverge pas au coeur du vortex ...)

et ensuite, v est continue en $r = R$ donc les 2 expressions doivent se raccorder : $\frac{A}{R} = \Omega_0 R$ et alors $A = \Omega_0 R^2$

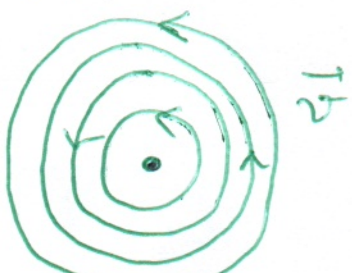
Finalement $\boxed{v(r) = \begin{cases} \dfrac{\Omega_0 R^2}{r} & \text{si } r > R \\ \Omega_0 r & \text{si } r < R \end{cases}}$

ok, c'est bien le même résultat.

<u>Rq</u> Il est peut-être temps de préciser un peu ce que l'on est en train d'étudier. Le modèle de Rankine est un modèle simple de tornade, cyclone, tourbillon, vortexe ou n'importe quel vocabulaire associé à des courants tournants. "Ça tourne" → on considère un rotationnel non nul, mais le plus simple possible : on prend un rotationnel constant ! Notez qu'il est "connu" (c'est-à-dire parfois évoqué) que les vents sont faibles au coeur d'une tornade (d'où $v \not\to +\infty$ dans les conditions aux limites), et plus fort aux bords, comme ce que nous calculons



Aussi, puisque $\vec{v}$ est orthoradial, les lignes de courant sont des cercles (tangents partout au champ de vitesse, par définition). Pas besoin de calculer $v(r)$ pour le savoir.



3) On calcule $\operatorname{div} \vec{v}$.

<u>pour $r > R$</u> $v(r) = \dfrac{\Omega_0 R^2}{r}$ donc $(\vec{v} = v(r)\vec{e_\theta})$

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} = 0$$

et idem <u>pour $r < R$</u>. Quelque soit l'endroit (à l'intérieur et à l'extérieur du vortex), l'écoulement est donc tel que $\boxed{\operatorname{div} \vec{v} = 0}$, c'est-à-dire qu'il est <u>incompressible</u>.

4) Par définition, $\vec{a} \equiv \dfrac{D\vec{v}}{Dt} = \underbrace{\cancel{\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}}}_{\vec{0} \text{ car stationnaire}} + (\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}$.

et $(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{grad}}\, v^2 + \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{v} \wedge \vec{v}$ d'après l'énoncé.

<u>pour $r > R$</u> $v(r) = \dfrac{\Omega_0 R^2}{r}$ donc $\overrightarrow{\text{grad}}\, v^2$ se calcule

par $\overrightarrow{\text{grad}}\, v^2 = \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{\Omega_0^2 R^4}{r^2}\right)\vec{e_r} = \dfrac{\Omega_0^2 R^4}{r^3}(-2)\,\vec{e_r}$

et $(\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{v}) \wedge \vec{v} = \vec{0} \wedge \vec{v}$ car $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{v} = \vec{0}$.

$= \vec{0}$.

d'où $$\boxed{\vec{a} = -2\,\frac{\Omega_0^2 R^4}{r^3}\,\vec{e_r}}$$

pour $r < R$ $\qquad v(r) = \Omega_0 r$ d'où

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, v^2 = \frac{\partial}{\partial r}\left(\Omega^2 r^2\right)\vec{e_r} = 2\Omega_0^2 r\, \vec{e_r}$$

et $$\left(\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{v}\right) \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\Omega_0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ \Omega_0 r \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2\Omega_0^2 r \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

donc $$\vec{a} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{grad}}\, v^2 + \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{v} \wedge \vec{v}$$

$$= \left(\Omega_0^2 r - 2\Omega_0^2 r\right)\vec{e_r}$$

soit $$\boxed{\vec{a} = -\Omega_0^2 r\, \vec{e_r}}$$

Rq Les 2 accélérations sont identiques en $r = R$; elle est continue.

Rq L'exercice est évidemment très chronophage puisque chaque grandeur doit être calculée 2 fois : pour $r > R$ et pour $r < R$.

Le champ de pression s'obtient alors en utilisant l'équation d'Euler

$$\rho\, \vec{a} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P + \rho \vec{g}$$

Rq On a bien sûr pensé à appliquer le théorème de Bernoulli pour obtenir la pression. Cependant, si l'écoulement est irrotationnel à l'extérieur du tourbillon, ce qui permet d'appliquer le théorème général, il ne l'est pas à l'intérieur. Les lignes de courant étant des cercles (à r cste), le théorème restreint ne nous permet pas d'obtenir $P(r, z)$.

On a donc $\vec{\text{grad}}\, P = \rho\left(\vec{g} - \underset{a\vec{e_r}}{\vec{a}}\right)$ soit, en projetant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial r} = -\rho a & (1) \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial P}{\partial \theta} = 0 & (2) \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = -\rho g & (3) \end{cases}$$

(avec a à préciser dans les 2 cas $r>R$ et $r<R$)

(z vers le haut)

Par (2) $P(r, \cancel{\theta}, z)$, puis par (3)

$$P(r,z) = -\rho g z + \underbrace{f(r)}_{\text{constante d'intégration}}$$

constante d'intégration (qui peut dépendre de r car on intègre par rapport à z)

Enfin, par (1) :

$$f'(r) = -\rho a.$$

Alors, on traite les 2 cas $r>R$ et $r<R$:

<u>si $r>R$</u> : $$a = -2\frac{\Omega_0^2 R^4}{r^3}$$

d'où $$f'(r) = +\frac{2\rho\Omega_0^2 R^4}{r^3}$$

et donc $$f(r) = -\frac{\rho\Omega_0^2 R^4}{r^2} + cte$$ en intégrant.

<u>si $r<R$</u> $$a = -\Omega_0^2 r$$

d'où $$f'(r) = +\rho\Omega_0^2 r$$

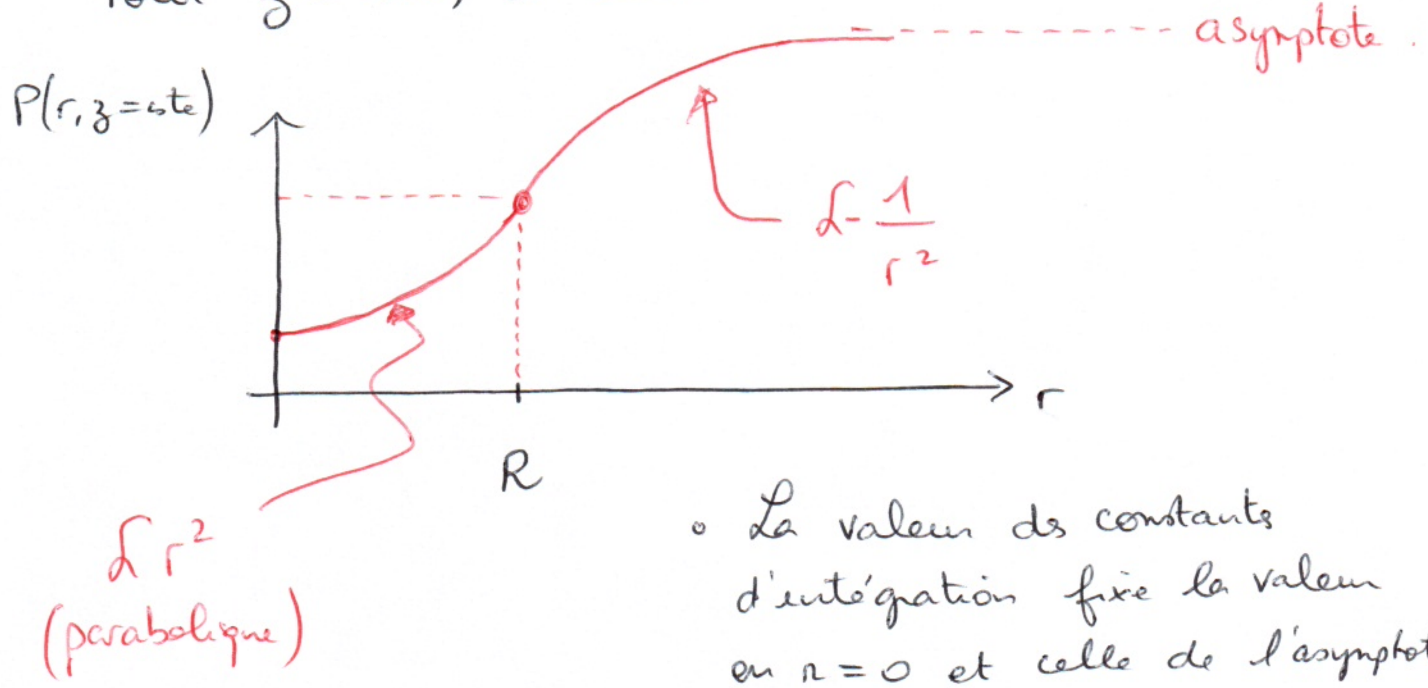
et donc $$f(r) = \frac{\rho\Omega_0^2 r^2}{2} + cte'$$

On ne cherche pas à déterminer les constantes.

Finalement

$$\boxed{P(r,z) = \begin{cases} \rho\left(\frac{\Omega_0^2 r^2}{2} - gz\right) + cte' & \text{si } r<R \\ -\rho\left(\frac{\Omega_0^2 R^4}{r^2} + gz\right) + cte & \text{si } r>R \end{cases}}$$

Pour $z = cte$, on trace



- La valeur des constantes d'intégration fixe la valeur en $r = 0$ et celle de l'asymptote.
- La pression est continue dans un fluide, donc les 2 expressions se raccordent en $r = R$.

5) On imagine maintenant que le fluide possède une surface libre (= en contact avec de l'air). Alors sur cette surface, par continuité de la pression à l'interface,

$$P(r, z) = P_0 \quad \text{[pression dans l'air]}$$

d'où

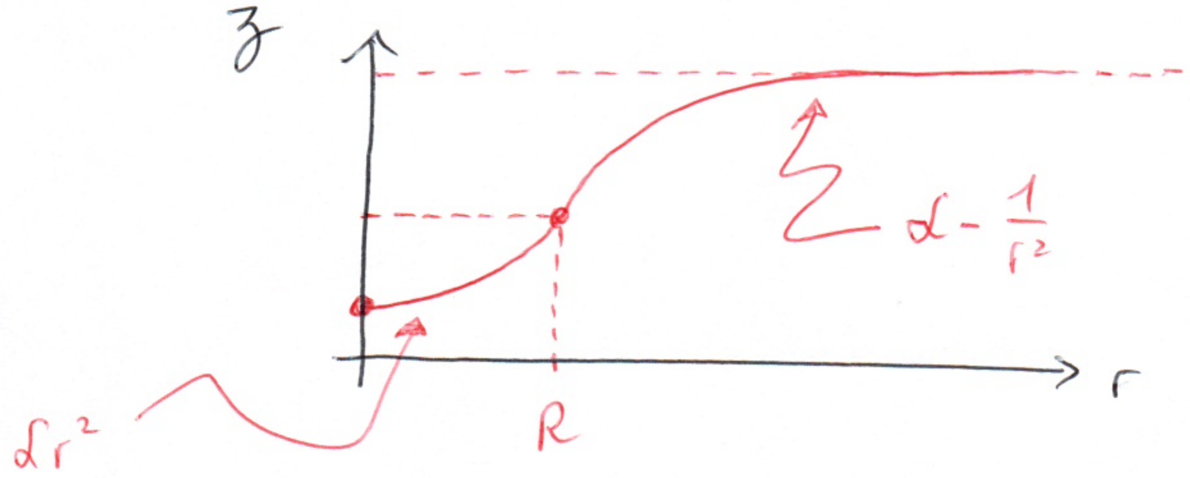
$\underline{\text{si } r < R}$:
$$z = \left(\frac{P_0 - Cte'}{\rho} - \frac{\Omega_0^2 r^2}{2} \right) \times \frac{1}{-g}$$

($\propto r^2$ parabolique)

$\underline{\text{si } r > R}$:
$$z = \frac{1}{g} \left(\frac{P_0 - Cte}{-\rho} - \frac{\Omega_0^2 R^4}{r^2} \right)$$

$\left(\propto -\frac{1}{r^2} \right)$

donc



Rq Notez que la pression (graphique p10) est plus faible au centre de la tornade qu'à l'extérieur. Il y a donc une force de pression axipète (vers l'axe) : on est attiré vers la tornade. Cela se constate en pratique : les poussières piégées dans un vortex d'évier y restent