H0-TD

Correction

H0 — 11 Risque d'hypoxie

1) En moyenne, l'atmosphère est constitué de **78% de diazote** N_2, de **21% de dioxygène** O_2 et de 1% d'autres gaz (Ar, CO_2, CH_4, vapeur d'eau...). On retiendra plus grossièrement 80% de N_2 et 20% d'O_2.

2) Au début de la i-ème inspiration, il y n_i moles de dioxygène dans l'habitacle. Le pilote avale un volume V_p d'air et il consomme un quart du dioxygène qui y est présent. Le dioxygène inspiré n_{insp} lors de cette inspiration s'obtient en déterminant la concentration c_i en $\text{mol}\cdot\text{m}^{-3}$

$$c_i = \frac{n_i}{V}$$

et puisque l'air inspiré a évidemment la même concentration que l'air ambiant, on a $n_{\text{insp}} = c_i\, V_p$. Par conséquent

$$n_{\text{insp}} = n_i\, \frac{V_p}{V}$$

Le dioxygène consommé n_c est le quart de n_{insp} donc

$$n_c = \frac{1}{4}\, n_{\text{insp}} = n_i\, \frac{V_p}{4\,V}$$

Au début de la $i+1$-ème inspiration, la quantité de dioxygène dans l'habitacle est donnée par $n_{i+1} = n_i - n_c$ soit en poursuivant le calcul

$$n_{i+1} = n_i - n_c = n_i - n_i\, \frac{V_p}{4\,V} = n_i \left(1 - \frac{V_p}{4\,V}\right) \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{n_{i+1} = n_i \left(1 - \frac{V_p}{4\,V}\right)}$$

3) Cela donne une relation de récurrence entre les n_i. Il s'agit d'une suite géométrique de raison $1 - V_p\,/\,(4\,V)$ ce qui conduit à

$$\boxed{n_i = n_0 \left(1 - \frac{V_p}{4\,V}\right)^i}$$

Ensuite, la pression partielle en dioxygène est par définition

$$P_{O_2,i} = \frac{n_i}{n_{\text{tot}}}\, P_{\text{tot}}$$

Notamment, pour l'inspiration $i = 0$, on a

$$P_{O_2,0} = \frac{n_0}{n_{\text{tot}}}\, P_{\text{tot}}$$

En utilisant l'expression de n_i on calcule alors que

$$P_{O_2,i} = \frac{n_i}{n_{\text{tot}}}\, P_{\text{tot}} = \frac{n_0}{n_{\text{tot}}} \left(1 - \frac{V_p}{4\,V}\right)^i P_{\text{tot}} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{P_{O_2,i} = P_{O_2,0} \left(1 - \frac{V_p}{4\,V}\right)^i}$$

4) Le pilote survit tant que $P_{O_2,i} > P_{O_2,\ell}$ d'après l'énoncé, c'est-à-dire

$$P_{O_2,0} \left(1 - \frac{V_p}{4\,V}\right)^i > P_{O_2,\ell} \qquad \text{soit} \qquad \left(1 - \frac{V_p}{4\,V}\right)^i > \frac{P_{O_2,\ell}}{P_{O_2,0}}$$

qui mène, en prenant le logarithme (croissant donc on garde le sens de l'inégalité), à

$$i\, \ln\left(1 - \frac{V_p}{4\,V}\right) > \ln\left(\frac{P_{O_2,\ell}}{P_{O_2,0}}\right) \qquad \text{et donc} \qquad \boxed{i < \frac{\ln\left(\dfrac{P_{O_2,\ell}}{P_{O_2,0}}\right)}{\ln\left(1 - \dfrac{V_p}{4\,V}\right)} = i_{\max}}$$

où on a cette fois inversé le sens de l'inégalité car $\ln\left(1 - V_p\,/\,(4\,V)\right) < 0$.

En prenant $P_{O_2,0} = 0{,}2\,P_{\text{tot}} = 2 \times 10^4$ Pa car il y a environ 20% de dioxygène dans l'atmosphère initial de pression $P_{\text{tot}} = 10^5$ Pa, et en écrivant

$$V = \frac{4}{3}\,\pi\,\left(\frac{D}{2}\right)^3$$

car l'habitacle est sphérique d'après l'énoncé (voir l'image dans l'énoncé de H0-10, et $D = 1{,}09$ m), on calcule numériquement le nombre maximal d'inspirations :

$$\boxed{i_{\text{max}} = \frac{\ln\left(\dfrac{P_{O_2,\ell}}{P_{O_2,0}}\right)}{\ln\left(1 - \dfrac{V_p}{4\,V}\right)} = 5{,}0 \times 10^3}$$

Puisque le pilote fait une inspiration toutes les $1\,/\,f = 4$ s, on détermine sa durée de vie τ dans l'habitacle par

$$\boxed{\tau = \frac{i_{\text{max}}}{f} = 2{,}0 \times 10^4 \text{ s} \approx 5 \text{ h } 30 \text{ min.}}$$

Remarquons que c'est **plus long que les 70 min nécessaires pour remonter à la surface**. Le pilote a donc le temps de revenir à l'air libre et peut par conséquent survivre en cas de défaillance du système de contrôle de l'atmosphère.