H0-TD

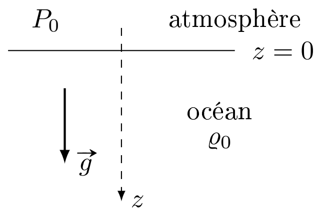
Correction

H0 — 09 Champ de pression dans l'océan

1) Cette équation traduit **l'équilibre mécanique** d'une particule de fluide.
- $\varrho\,\vec{g}$ est le **poids volumique**,
- et $-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P$ est l'**équivalent volumique des forces de pression**.

L'équation précise en fait « somme des forces (volumiques) = 0 ». On la nomme parfois *équation fondamentale de la statique des fluides*.

2) En projetant l'équation de la statique des fluides sur l'axe (Oz) descendant,



$$-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P + \varrho\,\vec{g} = \vec{0}$$

on obtient

$$-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} + \varrho\,g = 0$$

Le fluide étant modélisé comme une phase incompressible indilatable, on a $\varrho = \mathrm{Cste} = \varrho_0$. On poursuit le calcul en intégrant

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \varrho_0\,g \qquad \text{soit} \qquad P(z) = A + \varrho_0\,g\,z$$

Puisque l'interface océan-atmosphère est en $z = 0$, on a à cet endroit **continuité de la pression** donc $P(0) = P_0$ et ainsi $A = P_0$. Finalement,

$$\boxed{P(z) = P_0 + \varrho_0\,g\,z}$$

3) On considère une particule de fluide. Elle est par définition de **masse constante** $m = \mathrm{Cste}$. Si V est le volume de la particule de fluide et ϱ sa masse volumique, on a $m = \varrho\,V$. Puisque cette masse est constante, sa dérivée par rapport à n'importe quelle variable est nulle, et en particulier celle par rapport à la pression à température constante :

$$\left.\frac{\partial m}{\partial P}\right|_T = 0 = \varrho\,\left.\frac{\partial V}{\partial P}\right|_T + V\,\left.\frac{\partial \varrho}{\partial P}\right|_T$$

Il s'ensuit directement que

$$\frac{1}{\varrho}\,\left.\frac{\partial \varrho}{\partial P}\right|_T = -\frac{1}{V}\,\left.\frac{\partial V}{\partial P}\right|_T \equiv \chi_T$$

On a donc effectivement

$$\boxed{\chi_T = \frac{1}{\varrho}\,\left.\frac{\partial \varrho}{\partial P}\right|_T}$$

Remarque. *On peut aussi raisonner en disant que $V = m\,/\,\varrho$ donc*

$$\left.\frac{\partial V}{\partial P}\right|_T = m\,\left.\frac{\partial (1/\varrho)}{\partial P}\right|_T = -\frac{m}{\varrho^2}\,\left.\frac{\partial \varrho}{\partial P}\right|_T$$

et $m\,/\,\varrho^2 = V\,/\,\varrho$.

4) On suppose que χ_T est constante. Écrivons alors

$$\left.\frac{\partial \varrho}{\partial P}\right|_T = \chi_T\,\varrho$$

Pour une petite variation de pression $\mathrm{d}P$ lors d'un processus isotherme, on a alors à l'ordre 1 en $\mathrm{d}P$

$$\mathrm{d}\varrho = \chi_T\,\varrho\,\mathrm{d}P$$

Par ailleurs, pour la même petite variation de pression isotherme, l'équation fondamentale de la statique des fluides donne quant à elle

$$\mathrm{d}P = \varrho\,g\,\mathrm{d}z$$

La combinaison des deux précédentes équations conduit à

$$\mathrm{d}\varrho = \chi_T\,g\,\varrho^2\,\mathrm{d}z$$

On résout cette équation en séparant les variables

$$\frac{\mathrm{d}\varrho}{\varrho^2} = \chi_T\, g\, \mathrm{d}z$$

et en intégrant de $z = 0$ où $\varrho = \varrho_0$ à z où $\varrho = \varrho(z)$:

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho(z)} \frac{\mathrm{d}\varrho}{\varrho^2} = \chi_T\, g \int_0^z \mathrm{d}z = \chi_T\, g\, z$$

L'intégration mène à

$$\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho(z)} = \chi_T\, g\, z \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\varrho(z) = \frac{\varrho_0}{1 - \chi_T\, g\, \varrho_0\, z}}$$

5) En revenant à l'équation fondamentale de la statique des fluides, on peut utiliser l'expression de ϱ obtenue à la question précédente :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \varrho(z)\, g \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \frac{\varrho_0\, g}{1 - \varrho_0\, g\, \chi_T\, z}$$

On intègre cette équation différentielle par séparation des variables

$$\mathrm{d}P = \frac{\varrho_0\, g\, \mathrm{d}z}{1 - \varrho_0\, g\, \chi_T\, z}$$

puis en intégrant de $z = 0$ où $P = P_0$ à z où $P = P(z)$:

$$\int_{P_0}^{P(z)} \mathrm{d}P = \int_0^z \frac{\varrho_0\, g\, \mathrm{d}z}{1 - \varrho_0\, g\, \chi_T\, z} \qquad \text{soit} \qquad P(z) - P_0 = -\frac{1}{\chi_T} \ln\left(1 - \varrho_0\, g\, \chi_T\, z\right)$$

On conclut

$$\boxed{P(z) = P_0 - \frac{1}{\chi_T} \ln\left(1 - \varrho_0\, g\, \chi_T\, z\right)}$$

Remarque. *Dans l'hypothèse d'un fluide très peu compressible, on peut dire que χ_T est très petit donc un développement limité est possible :* $\ln(1 - \varrho_0\, g\, \chi_T\, z) \approx -\varrho_0\, g\, \chi_T\, z$*. Par conséquent, on a $P(z) \approx P_0 + \varrho\, g\, z$, ce qui correspond à ce qu'on attend puisqu'on retombe sur l'expression obtenue pour un fluide incompressible.*

6) Avec les valeurs de l'énoncé et $P_0 = 1013$ hPa pour la pression atmosphérique moyenne, on calcule en $z = z_{\max}$ que

$$\boxed{P(z_{\max}) = 1{,}12 \times 10^8 \text{ Pa}}$$

L'accord avec la mesure expérimentale $P_{\text{exp}} = 1{,}13 \times 10^8$ Pa est

$$\frac{P_{\text{exp}} - P(z_{\max})}{P_{\text{exp}}} = 0{,}9\,\%$$

ce qui est **convenable**. Pour améliorer le modèle, on pourrait **ne plus considérer l'océan isotherme**, on pourrait aussi tenir compte de l'évolution de la masse volumique avec la salinité, ou encore on pourrait éventuellement tenir compte de la variation de la pesanteur avec la profondeur.

Remarque. *Commentons qu'avec le modèle incompressible, on obtient*

$$P(z_{max}) = P_0 + \varrho\, g\, z_{max} = 1{,}09 \times 10^8 \text{ Pa}$$

*qui est **moins proche de la mesure expérimentale**. Le modèle tenant compte de la compressibilité de l'eau est meilleur.*