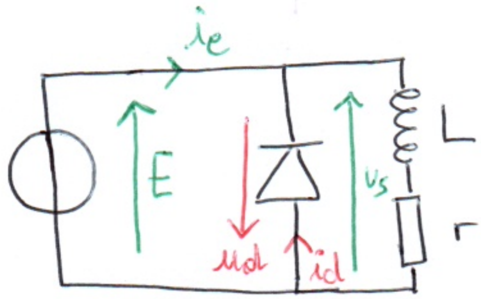
# ET3 - 01 Hacheur sur charge inductive

1) On dessine les circuits correspondants aux deux états du transistor

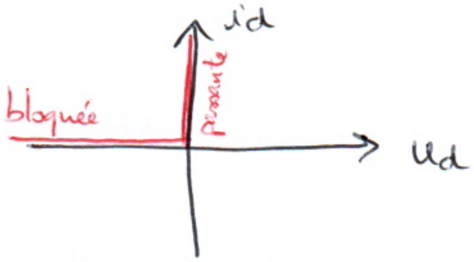
entre 0 et $\alpha T$ :

(transistor passant)




Par loi des mailles, $E = u_s$. En notant $u_d$ la tension aux bornes de la diode (en convention récepteur), on a évidemment $u_d = -u_s = -E < 0$

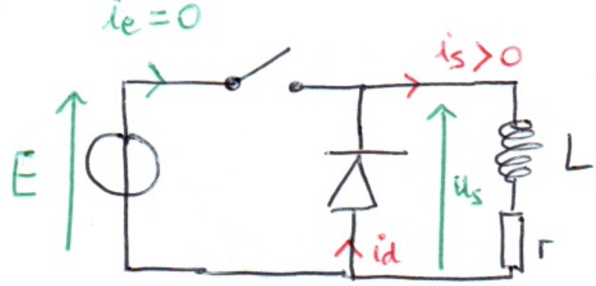
En rappelant la caractéristique d'une diode idéale




on conclut que si $u_d < 0$, alors la diode est bloquée.

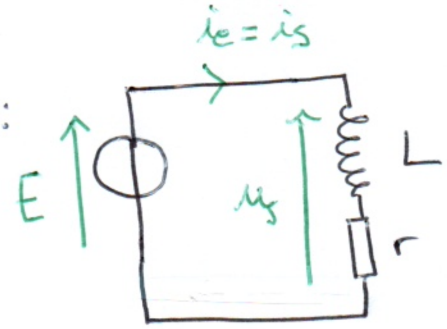
entre $\alpha T$ et T :

(transistor bloqué)




Par loi des noeuds, $i_d = i_s > 0$ donc la diode est passante.

## 2) Entre 0 et $\alpha T$ :




(transistor passant et diode bloquée).

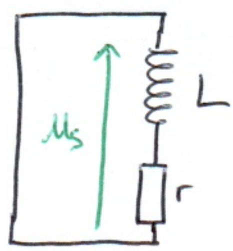
Par loi des mailles

$$E = u_s = u_L + u_r = L\frac{di_s}{dt} + r i_s$$

d'où

$$\boxed{\frac{di_s}{dt} + \frac{r}{L} i_s = \frac{E}{L}} \quad (1)$$

Entre $\alpha T$ et $T$ :




(transistor bloqué et diode passante)

Par loi des mailles, $u_s = 0 = U_L + U_r$ d'où

$$\boxed{\frac{di_s}{dt} + \frac{r}{L} i_s = 0} \quad (2)$$

## 3) Ce sont des équations différentielles ordinaires linéaires du premier ordre, à coefficients constants avec (et sans) second membre constant.

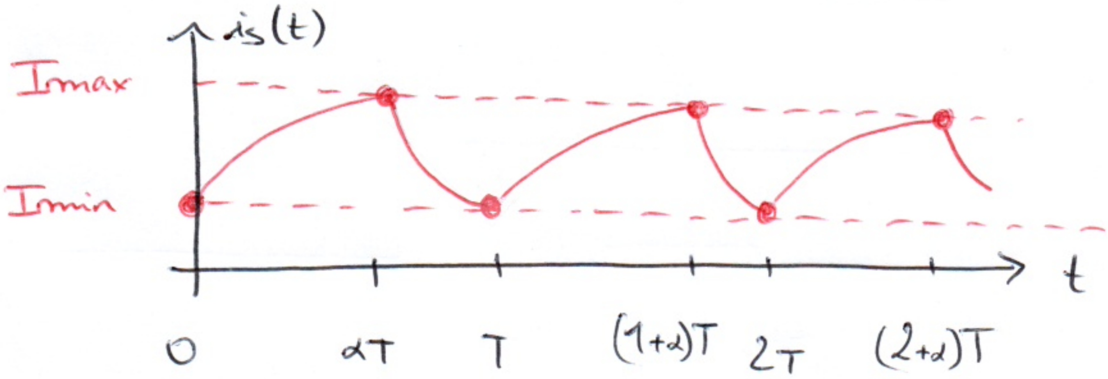
(1) se résout par $i_s(t) = A \exp\left(-t/\tau\right) + \frac{E}{r}$

et (2) par $i_s(t) = B \exp\left(-t/\tau\right)$

avec $\tau = \frac{L}{r}$ et A et B des constantes d'intégration.

L'allure dépend des signes de A et B qu'on ne détermine pas. Cependant, puisqu'on sait que le circuit fonctionne en régime périodique, et vu que la bobine impose la continuité de $i_s$, forcément l'une des exponentielles "monte" et l'autre "descend".

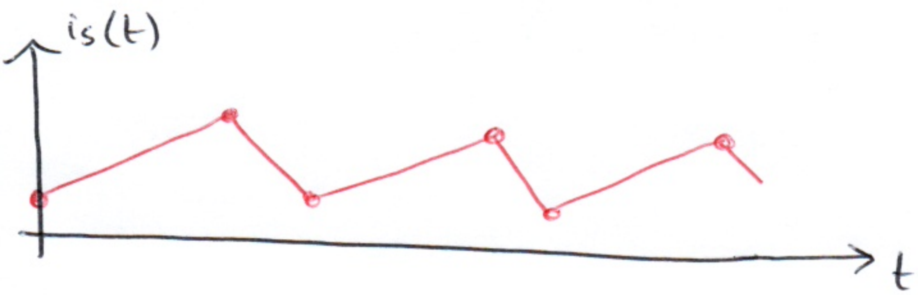
On propose l'allure suivante :




Cette allure est affine par morceaux si les exponentielles sont suffisamment courtes pour être assimilables à leurs tangentes à l'origine, donc si

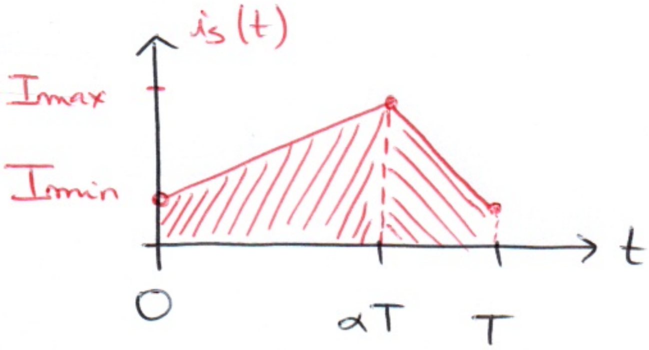
$$\boxed{\tau \gg T}$$

Alors dans ce cas



4/ On se place dans le cas où $i_s(t)$ est affine par morceaux.

Alors sur une période :




Rq : entre 0 et $\alpha T$ par lecture graphique

$$i_s(t) = I_{min} + \frac{I_{max} - I_{min}}{\alpha T} t$$

entre $\alpha T$ et $T$ : $i_s(t) = I_{max} - \frac{I_{max} - I_{min}}{(1-\alpha)T}(t - \alpha T)$

La valeur moyenne est par définition

$$\langle i_s \rangle \equiv \frac{1}{T} \int_0^T i_s(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{T} \left\{ \int_0^{\alpha T} i_s(t)\,dt + \int_{\alpha T}^{T} i_s(t)\,dt \right\}$$

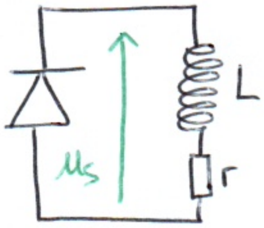
Les intégrals correspondant à l'aire sous la courbe, on a (rappel aire d'un trapèze = "base" × "somme des hauteurs" / 2)

$$\langle i_s \rangle = \frac{1}{T} \left\{ \frac{\alpha T \times (I_{max} + I_{min})}{2} + (1-\alpha)T \frac{I_{max} + I_{min}}{2} \right\}$$

$$\boxed{\langle i_s \rangle = \frac{I_{max} + I_{min}}{2}}$$

On calcule maintenant cette même valeur moyenne, sans forcément supposer $i_s$ affine par morceaux.

Pour cela, on revient sur l'équation différentielle (vrai dans les 2 états du circuits)




$$L\frac{di_s}{dt} + r i_s = u_s$$

Alors en moyenne

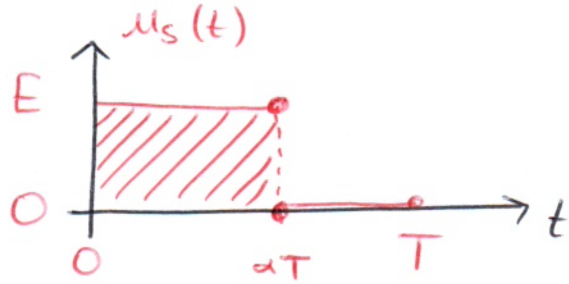
$$L\left\langle \frac{di_s}{dt}\right\rangle + r\langle i_s\rangle = \langle u_s\rangle$$

mais puisque $i_s$ est périodique, $\left\langle \frac{di_s}{dt}\right\rangle = 0$ donc

$$\langle i_s\rangle = \frac{\langle u_s\rangle}{r}$$

Sachant que $u_s = 0$ quand la diode est passante, et $u_s = E$ quand elle est bloquée, on a

$$\langle u_s\rangle = \alpha E$$




d'où $\boxed{\langle i_s\rangle = \frac{\alpha E}{r}}$

5) On détermine le taux d'ondulation grâce aux expressions de $i_s(t)$ : (1) et (2). Dans ces équations, en supposant la fonction affine par morceaux, on a

$$\frac{di_s}{dt} = \frac{I_{max} - I_{min}}{\alpha T} \quad \text{et} \quad \frac{di_s}{dt} = -\frac{I_{max} - I_{min}}{(1-\alpha)T}$$

d'où,

<u>entre 0 et $\alpha T$</u>

$$\frac{\Delta i_s}{\alpha T} + \frac{r}{L} i_s = \frac{E}{L} \qquad (*)$$

<u>entre $\alpha T$ et $T$</u> : $$-\frac{\Delta i_s}{(1-\alpha)T} + \frac{r\, i_s}{L} = 0 \qquad (**)$$

Précisément en $t = \alpha T$, on a dans les 2 cas (continuité de $i_s$)

$$i_s = I_{max}$$

d'où, par $(*) - (**)$ :

$$\frac{\Delta i_s}{T}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha}\right) = \frac{E}{L}$$

et donc $$\boxed{\Delta i_s = \frac{\alpha(1-\alpha)ET}{L}}$$

Si on veut $\Delta i_s < \frac{\langle i_s \rangle}{100}$ alors il faut

$$\frac{\alpha(1-\alpha)}{L} ET < \frac{\alpha E}{100 r} \quad \text{d'où} \quad \boxed{T < \frac{L}{100 r (1-\alpha)}}$$

6] La puissance fournie par le générateur d'entrée est

$$P_f = i_e E \quad \text{soit en moyenne}$$

$$\langle P_f \rangle = E \langle i_e \rangle$$

Or $i_e = 0$ entre $\alpha T$ et $T$, et $i_e = i_s$ entre $0$ et $\alpha T$

donc $$\langle i_e \rangle = \frac{1}{T}\left(0 + \underbrace{\int_0^{\alpha T} i_s(t)\,dt}_{= \alpha T \frac{I_{max} + I_{min}}{2}}\right) \quad \text{(Aire sous la courbe)}$$

$$= \frac{\alpha}{2}(I_{max} + I_{min})$$

d'où $$\boxed{\langle P_f \rangle = \frac{\alpha E}{2}(I_{max} + I_{min})}$$

Par ailleurs, la puissance reçue par la charge est

$$P_r = u_s i_s \quad \text{soit en moyenne}$$

$$\langle P_r \rangle = \langle u_s i_s \rangle$$

$$= \frac{1}{T}\left(\int_0^{\alpha T} \underbrace{u_s(t)}_{=E} i_s(t)\,dt + \cancelto{0}{\int_{\alpha T}^{T} \underbrace{u_s(t)}_{=0} i_s(t)\,dt}\right)$$

$$= \frac{1}{T} E \underbrace{\int_0^{\alpha T} i_s(t)\,dt}_{= \alpha T \frac{I_{max} + I_{min}}{2}} \quad \text{(idem précédemment)}$$

d'où $$\boxed{\langle P_r \rangle = \frac{\alpha E}{2}(I_{max} + I_{min})}$$

Rq La bobine ne reçoit en fait aucune puissance en moyenne car

$$\langle u_L i_s \rangle = L \left\langle i_s \frac{di_s}{dt} \right\rangle$$
$$= \frac{1}{2} L \left\langle \frac{d(i_s)^2}{dt} \right\rangle$$
$$= 0$$

car puisque $i_s$ est périodique, $i_s^2$ aussi

Rappel C'est l'occasion de redire pourquoi la dérivée d'une fonction périodique est de moyenne nulle.

Si $f$ est périodique, alors

$$\left\langle \frac{df}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{df}{dt} dt = \frac{1}{T} \left( f(T) - f(0) \right) = 0$$

identique par périodicité

Conc On a calculé $\langle P_f \rangle = \langle P_r \rangle$ : toute la puissance fournie est effectivement reçue par la charge.

Le montage hacheur permet le transfert de puissance sans perte !

Le rendement est $\boxed{\eta = \dfrac{\langle P_r \rangle}{\langle P_f \rangle} = 1}$