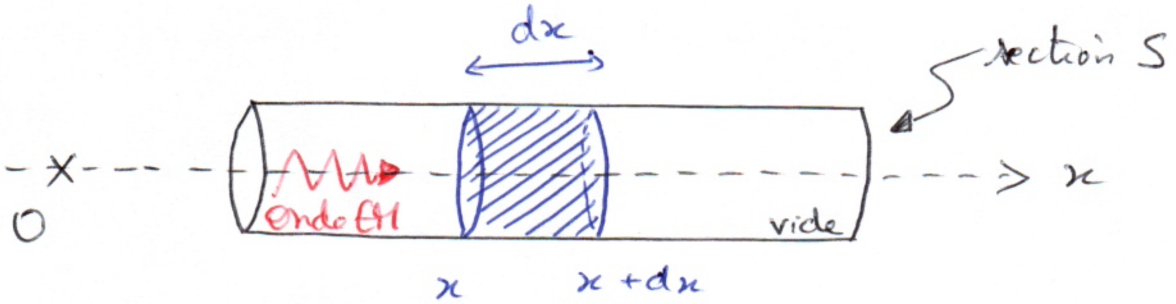
EM7-16 Équation de conservation de l'énergie électromagnétique.

Un exercice qui aboutit à l'équation de conservation de l'énergie EM, à mettre en regard de l'équation de conservation de la masse (chapitre H1) et de la charge (chapitre EM7), puis aussi de celles de particules (D1) et de l'énergie thermique (D2).

Bref, c'est un bilan mésoscopique pour obtenir une équation de conservation à 1D.



1) L'énergie du système en bleu s'obtient à partir de la densité volumique d'énergie EM u

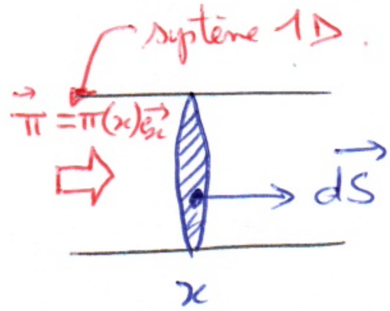
$$u \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

volume = $S\,dx$

L'énergie s'écrit $\boxed{d\mathcal{E} = u\,dV = uS\,dx}$

2) L'énergie qui rentre dans le système entre t et $t+dt$, à travers la section S en x, s'obtient quant à elle à partir du vecteur de Poynting $\vec{\pi} = \dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$

Elle s'écrit $$d\mathcal{E}_e = \left(\iint_{en\,x} \vec{\pi} \cdot \vec{dS}\right) dt$$



soit $$\boxed{d\mathcal{E}_e = \pi(x,t) S\, dt}$$

celle qui en sort est par analogie

$$\boxed{d\mathcal{E}_s = \pi(x+dx, t) S\, dt}$$

3) Le cylindre étant vide, il n'y a ni charge ni courant

$$\rho = 0 \quad \text{et} \quad \vec{j} = \vec{0}$$

donc il n'y a pas d'énergie dissipée (terme de Joule : puissance volumique $P_v = \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$).

4) On dresse un bilan d'énergie EM pour le système. On écrit :

"énergie à $t+dt$" $\ominus$ "énergie à t"

= "énergie rentrée" $\ominus$ "énergie sortie" $\ominus$ "énergie dissipée"

Soit

$$u(x, t+dt) S dx - u(x,t) S dx$$

$$= \pi(x,t) S dt - \pi(x+dx, t) S dt - 0$$

d'où $$\frac{\partial u}{\partial t} \cancel{S} \cancel{dx} \cancel{dt} = - \frac{\partial \pi}{\partial x} \cancel{S} \cancel{dt} \cancel{dx}$$

et finalement

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \pi}{\partial x} = 0}$$

Équation de conservation de l'énergie EM (à 1D, sans dissipation)

Rq • À 3D, on avait

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\pi} = 0$$

• En présence de matière, le terme de dissipation donnerait

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\pi} = \underbrace{-\vec{j} \cdot \vec{E}}_{\text{dissipation}}$$

Sous cette forme, l'équation porte le nom d'"équation de Poynting" (voir chap EM8).