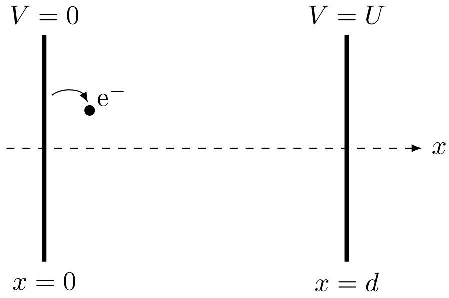
EM7-TD

Correction

EM7 — 14 Caractéristique d'une diode à vide

1) On commence par un schéma.



Après avoir été arraché à l'électrode de gauche, donc une fois à l'intérieur de la diode à vide, l'électron n'est soumis qu'à la force de Lorentz (son poids est négligeable devant cette dernière). En l'absence de champ magnétique, elle s'écrit $\vec{F} = -e\,\vec{E}$. Par ailleurs, la situation étant en régime stationnaire, on a $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$ donc cette force dérive de l'énergie potentielle $E_p = -e\,V(x)$.

Alors, puisque la seule force à laquelle est soumise l'électron est conservative, l'énergie mécanique de l'électron se conserve :

$$E_m = \text{Cste} \qquad \text{soit} \qquad \frac{1}{2}\,m\,v^2 - e\,V(x) = \text{Cste}$$

L'électron, juste après avoir été arraché à l'électrode de gauche en $x = 0$, a une vitesse nulle $v(0) = 0$. On déduit donc, puisque qu'on a aussi $V(0) = 0$, que

$$\text{Cste} = 0 \qquad \text{donc} \qquad \frac{1}{2}\,m\,v^2 = e\,V(x)$$

d'où finalement

$$\boxed{v(x) = \sqrt{\frac{2\,e\,V(x)}{m}}} \tag{1}$$

2) La densité surfacique de courant est d'après le cours

$$\boxed{j_0 = \varrho(x)\,v(x)} \tag{2}$$

3) La situation étant stationnaire, on a $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$. Par ailleurs, l'équation de Maxwell-Gauss

$$\text{div}\,\vec{E} = \frac{\varrho(x)}{\varepsilon_0} \qquad \text{conduit à} \qquad \boxed{\Delta V = -\frac{\varrho(x)}{\varepsilon_0}} \qquad \textbf{(appelée équation de Poisson)}$$

car $\text{div}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,V = \Delta V$.

4) Le système étant unidimensionnel, le laplacien du potentiel

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \qquad \text{se résume à} \qquad \Delta V = \frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2}$$

L'équation de Poisson s'écrit donc

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{\varrho(x)}{\varepsilon_0} \qquad \text{soit} \qquad V''(x) = -\frac{\varrho(x)}{\varepsilon_0}$$

En utilisant alors l'équation (2), on obtient

$$V''(x) = -\frac{j_0}{\varepsilon_0\,v(x)}$$

puis avec (1)

$$\boxed{V''(x) = -\frac{j_0}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2\,e\,V(x)}}}$$

C'est une **équation différentielle ordinaire non linéaire du second ordre**. A priori, il n'existe pas de méthode générale pour résoudre ce type d'équation. Heureusement ici, en multipliant par $V'(x)$, on a

$$V'(x)\,V''(x) = -\frac{j_0}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2\,e}}\,\frac{V'(x)}{\sqrt{V(x)}}$$

qui s'intègre directement ! Effectivement, on déduit

$$\frac{1}{2}\,V'(x)^2 = -2\,\frac{j_0}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2\,e}}\,\sqrt{V(x)} + \text{Cste}$$

On détermine la constante d'intégration en évaluant l'expression en $x = 0$. On trouve, en admettant d'après l'énoncé que $V'(0) = 0$, que Cste $= 0$. D'où (on prend $+\sqrt{\cdots}$ car V augmente quand x augmente donc $V' > 0$) :

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = \sqrt{-\frac{4\,j_0}{\varepsilon_0}}\,\left(\frac{m}{2\,e}\right)^{1/4}\,V^{1/4}(x)$$

(Pas de problème de signe ici puisque $j_0 < 0$: effectivement $\varrho < 0$ car il s'agit d'électrons, donc chargés négativement. On prend bien la racine d'une quantité positive.)

L'équation s'intègre en séparant les variables :

$$\frac{\mathrm{d}V}{V^{1/4}} = \sqrt{-\frac{4\,j_0}{\varepsilon_0}}\,\left(\frac{m}{2\,e}\right)^{1/4}\,\mathrm{d}x$$

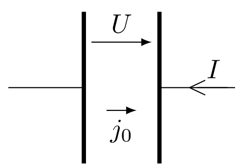
L'intégration de $x = 0$ (où $V = 0$) à $x = d$ (où $V = U$) s'écrit

$$\int_0^U \frac{\mathrm{d}V}{V^{1/4}} = \sqrt{-\frac{4\,j_0}{\varepsilon_0}}\,\left(\frac{m}{2\,e}\right)^{1/4}\int_0^d \mathrm{d}x$$

d'où

$$\frac{4}{3}\,U^{3/4} = \sqrt{-\frac{4\,j_0}{\varepsilon_0}}\,\left(\frac{m}{2\,e}\right)^{1/4}\,d$$

Alors, en élevant cette expression au carré puis en donnant finalement $j_0 = -I\,/\,S$ (le signe « $-$ » provient du choix d'une convention récepteur entre U et I), on conclut



$$\frac{16}{9}\,U^{3/2} = \frac{4\,I}{S\,\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2\,e}}\,d^2$$

et on aboutit bien à la **loi de Child-Langmuir**

$$\boxed{I = \frac{4\,S\,\varepsilon_0}{9\,d^2}\sqrt{\frac{2\,e}{m}}\,U^{3/2}}$$

Les diodes à vide sont ainsi des dipôles dont la caractéristique est telle que $U \propto I^{2/3}$. Cela est à mettre en opposition avec les résistances pour lesquelles $U = R\,I \propto I$ (loi d'Ohm).

5) Les diodes sont des dispositifs qui conduisent le courant dans un seul sens. Ici évidemment, si $U < 0$, alors les électrons arrachés à l'électrode de gauche sont accélérés vers la gauche et non vers la droite : les électrons ne vont donc pas vers l'électrode de droite et en conséquence **le courant ne passe pas**. On peut donc tracer la caractéristique suivante, typique d'une diode.