EM7-TD

Correction

EM7 — 12 Magnétorésistance par effet Corbino

1) La question est très peu guidée. Une bonne manière pour démarrer dans ce cas est de lister les lois auxquelles on pourra faire appel dans la résolution. Déjà, le matériau est conducteur donc on a la loi d'Ohm locale $\vec{\jmath} = \gamma \vec{E}$. Ensuite, même si l'énoncé ne le dit pas explicitement, la situation étudiée est statique (le potentiel imposé aux bornes de l'anneau est indépendant du temps). C'est un principe de Curie : ici la source du champ $\vec{E}$ et du courant $\vec{\jmath}$ est la différence de potentiel. Si cette dernière est indépendante du temps, alors les conséquences ($\vec{E}$ et $\vec{\jmath}$) le sont aussi. Cela étant compris, on a en statique deux lois d'intérêt :

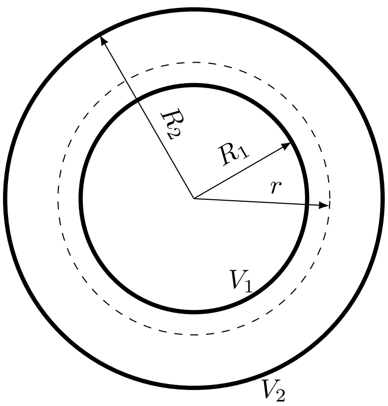
1. $\vec{E}$ dérive du potentiel V par $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$;
2. on a la loi des nœuds $\text{div}\, \vec{\jmath} = 0$.

Commentons. 1) vient de l'équation de Maxwell-Faraday $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{E} = \vec{0}$ en statique (voir cours EM1). Quant à 2), cela vient de l'équation de conservation de la charge (voir cours EM7)

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \text{div}\, \vec{\jmath} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \text{div}\, \vec{\jmath} = 0 \qquad \text{en statique.}$$

Cela constitue une étude préliminaire. Ayant ces expressions en tête, nous voulons la résistance R de l'anneau. Comme dans le cours EM9 avec l'exemple du fil, nous souhaitons identifier une résistance en calculant la tension $U = V_1 - V_2$ en fonction de I puis en utilisant la loi d'Ohm $U = R\, I$. Il reste à structurer le raisonnement.

Ayant remarqué la géométrie cylindrique du problème (invariance par rotation autour de l'axe central), on suppose que la densité de courant est radiale $\vec{\jmath} = j(r)\, \vec{e_r}$. Alors d'une part, puisque le problème est statique, on a la « loi des nœuds » $\text{div}\, \vec{\jmath} = 0$. Nous ne connaissons pas l'opérateur divergence en cylindrique mais nous pouvons raisonner de manière intégrale : $\text{div}\, \vec{\jmath} = 0$ est équivalent à dire que $\vec{\jmath}$ est à flux conservatif. Ici, cela signifie que le flux de $\vec{\jmath}$ à travers une surface cylindrique de hauteur h et de rayon r compris entre R_1 et R_2 est indépendant de r. En effet, il n'y pas d'accumulation de charges entre r et r' donc le flux de charges à travers le cylindre de rayon r est égal à celui à travers le cylindre de rayon r'. Le flux de $\vec{\jmath}$ représentant l'intensité du courant, on écrit



Vue de haut

$$I = \iint \vec{\jmath} \cdot \overrightarrow{\text{d}S} = 2\,\pi\, r\, h\, j(r) \qquad \text{soit} \qquad j(r) = \frac{I}{2\,\pi\, r\, h}$$

D'autre part, puisque le matériau est conducteur, la loi d'Ohm locale donne

$$\vec{E} = \frac{\vec{\jmath}}{\gamma} = \frac{I}{2\,\pi\,\gamma\, h\, r}\, \vec{e_r}$$

Ensuite, le champ électrique dérive du potentiel en statique donc

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$$

En projetant sur les vecteurs $\vec{e_\theta}$ et $\vec{e_z}$, on montre que

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

donc V ne dépend que de r. La projection sur le vecteur $\vec{e_r}$ conduit alors à

$$-\frac{\text{d}V}{\text{d}r} = \frac{I}{2\,\pi\,\gamma\, h\, r} \qquad \text{soit} \qquad V(r) = -\frac{I}{2\,\pi\,\gamma\, h} \ln r + \text{Cste}$$

Il nous reste à exploiter les conditions aux limites $V(R_1) = V_1$ et $V(R_2) = V_2$:

$$V_1 = -\frac{I}{2\,\pi\,\gamma\,h}\,\ln R_1 + \text{Cste} \qquad \text{et} \qquad V_2 = -\frac{I}{2\,\pi\,\gamma\,h}\,\ln R_2 + \text{Cste}$$

La différence des deux permet d'aboutir à la tension

$$U = V_1 - V_2 = \frac{I}{2\,\pi\,\gamma\,h}\,\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

On identifie finalement par loi d'Ohm une résistance équivalente R telle que $U = R\,I$:

$$\boxed{R = \frac{1}{2\,\pi\,\gamma\,h}\,\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \qquad (1)$$

2) L'ajout d'un champ magnétique va dévier les porteurs de charges qui assurent le passage du courant d'un bord à l'autre de l'anneau. L'énoncé explique que cela se traduit par une résistance effective R' qu'on souhaite déterminer.

Pour cela, on considère comme système un porteur de charge « moyen », c'est-à-dire qui représente la moyenne de tous les porteurs de charges. Le modèle de Drüde (voir chapitre O8) consiste à supposer que la résistance électrique d'un matériau se modélise comme une force de frottements fluides sur les porteurs de charges $\vec{F} = -m\,\vec{v}\,/\,\tau$. En plus de cette force, le porteur de charge moyen est soumis à la force de Lorentz. À l'équilibre (régime statique), ces deux forces se compensent

$$q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right) - \frac{m}{\tau}\,\vec{v} = \vec{0}$$

Dès lors, puisque dans un conducteur $\vec{\jmath} = n\,q\,\vec{v}$ où n est la densité de porteurs de charge, on a

$$\vec{E} = \frac{m}{n\,q^2\,\tau}\,\vec{\jmath} - \frac{1}{n\,q}\,\vec{\jmath} \wedge \vec{B}$$

Le premier terme conduit à la **loi d'Ohm locale en l'absence de champ magnétique**, celle que l'on connait $\vec{\jmath} = \gamma\,\vec{E}$. On identifie d'ailleurs que la conductivité du matériau est donnée par $\gamma = n\,q^2\,\tau\,/\,m$. Mais ici, la présence du second terme indique que la loi d'Ohm locale du cours n'est plus vérifiée (c'est l'occasion de rappeler le statut phénomélogique de la loi d'Ohm locale, elle n'est pas tout le temps vraie...). C'est la présence de ce second terme qui rend compte de l'**effet Corbino**.

Le champ $\vec{E}$ étant créé par la différence de potentiel, il n'est pas changé par l'ajout du champ $\vec{B} = B\,\vec{e_z}$: il reste uniquement radial. On projette alors

$$\begin{cases} (\text{sur } \vec{e_r}) & E_r = \dfrac{j_r}{\gamma} - \dfrac{1}{C_H}\,j_\theta\,B \\[2ex] (\text{sur } \vec{e_\theta}) & 0 = \dfrac{j_\theta}{\gamma} + \dfrac{1}{n\,q}\,j_r\,B \end{cases}$$

La deuxième équation conduit à

$$j_\theta = -\frac{\gamma}{n\,q}\,j_r\,B$$

donc, grâce à la première équation,

$$E_r = \frac{j_r}{\gamma}\left(1 + \frac{\gamma^2}{n^2\,q^2}\,B^2\right)$$

On comprend qu'en présence d'un champ magnétique, on retrouve une loi d'Ohm locale effective « $j_r = \gamma\,E_r$ », à condition de remplacer la conductivité γ par une conductivité effective

$$\gamma \longrightarrow \gamma' = \frac{\gamma}{1 + \gamma^2\,C_H^2\,B^2} \qquad \text{avec} \qquad C_H = \frac{1}{n\,q}$$

En utilisant l'équation (1), on comprend que la résistance de l'anneau est alors modifiée selon

$$R \longrightarrow \boxed{R' = R\,\left(1 + \gamma^2\,C_H^2\,B^2\right)}$$

C'est bien la formule de l'énoncé. On peut l'interpréter comme suit : du fait du champ magnétique $\vec{B}$, les porteurs de charge sont déviés et ont dès lors plus de chemin à parcourir pour aller d'un bord à l'autre de l'anneau. Cette augmentation de chemin se traduit par une augmentation de la résistance. On remarque en effet que $R' > R$.