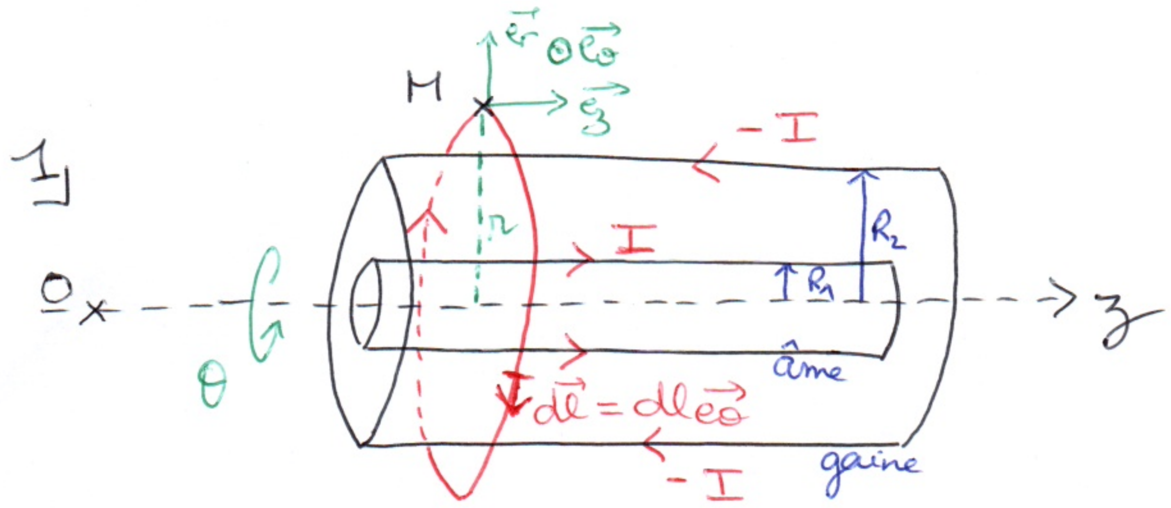
EM4-03 Inductance linéique d'un câble coaxial



On souhaite appliquer le théorème d'Ampère.

<u>Étude des symétries</u> : On suppose le câble infini. Alors le plan $(M, \vec{e_r}, \vec{e_z})$ est un plan de symétrie de la distribution des courants, donc d'antisymétrie de $\vec{B}$ par principe de Curie. Ainsi, $\vec{B}$ est orthogonal à ce plan, et

$$\vec{B} = B\vec{e_\theta}$$

<u>Étude des invariances</u> : La distribution des courants est invariante par rotation d'angle θ, et par translation suivant z (le câble est infini). $\vec{B}$ ne peut alors pas dépendre de ces variables par principe de Curie.

$$\vec{B}(r, \cancel{\theta}, \cancel{z})$$

Finalement $\boxed{\vec{B} = B(r)\vec{e_\theta}}$

On applique alors le théorème d'Ampère sur le cercle d'axe (Oz) passant par M **ORIENTÉ** (voir schéma).

On a

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I_{enlacée}$$

D'une part,

constant car r l'est sur le contour d'intégration

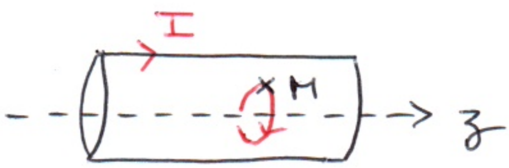
$$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \oint B(r)\cancel{\vec{e_\theta}} \cdot dl\cancel{\vec{e_\theta}}$$

$$= B(r) \oint dl$$

$$= 2\pi r \, B(r)$$

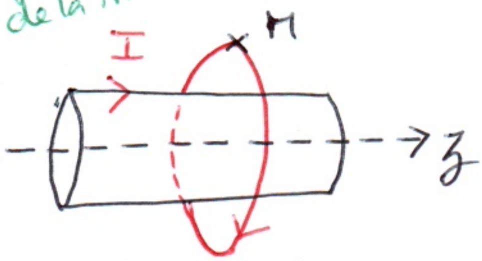
D'autre part,

- si $r < R_1$: $I_{enlacée} = 0$
(l'âme est creuse)

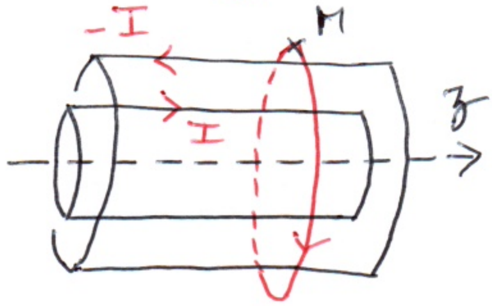


règle du pouce de la main droite

- si $R_1 < r < R_2$: $I_{enlacée} = + I$



- si $r > R_2$: $I_{enlacée} = 0$
$(= + I - I)$

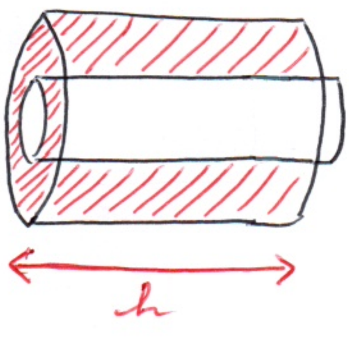


Finalement, $2\pi r B(r) = \begin{cases} \mu_0 I & \text{si } R_1 < r < R_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

et donc
$$\boxed{\vec{B} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e_\theta} & \text{si } R_1 < r < R_2 \\ \vec{0} & \text{sinon} \end{cases}}$$

2) On suppose que $\vec{B}$ ne change pas d'expression.
Dans le câble, entre l'âme et la gaine où règne le champ magnétique, il y a une densité volumique d'énergie magnétique
$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0}{8\pi^2}\frac{I^2}{r^2}$$

L'énergie est alors



un élément de volume

$$\mathcal{E}_m = \underset{\substack{\text{espace rouge} \\ (\text{entre } R_1 \text{ et } R_2)}}{\iiint} u_m \, d\tau$$

L'élément de volume en cylindrique s'écrit $\quad d\tau = r\,dr\,d\theta\,dz$

d'où
$$\mathcal{E}_m = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2}\underbrace{\left(\int_{r=R_1}^{R_2}\frac{r\,dr}{r^2}\right)}_{=\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}\underbrace{\left(\int_{\theta=0}^{2\pi}d\theta\right)}_{=2\pi}\underbrace{\left(\int_0^h dz\right)}_{=h}$$

et donc

$$\mathcal{E}_m = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} h \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

En identifiant cette énergie à $\frac{1}{2} L I^2$, on trouve

$$L = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

et finalement l'inductance linéique $\ell = \frac{L}{h}$ est

$$\boxed{\ell = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

<u>Rq</u> On rappelle que μ_0 est en $H.m^{-1}$. L'expression est donc bien homogène.

3) <u>AN</u> $(\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ H.m^{-1})$

$$\boxed{\ell = 4{,}6 \times 10^{-8}\ H.m^{-1}}$$