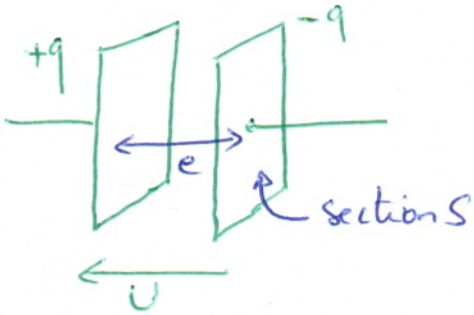
EM1 - 09 Condensateur cylindrique

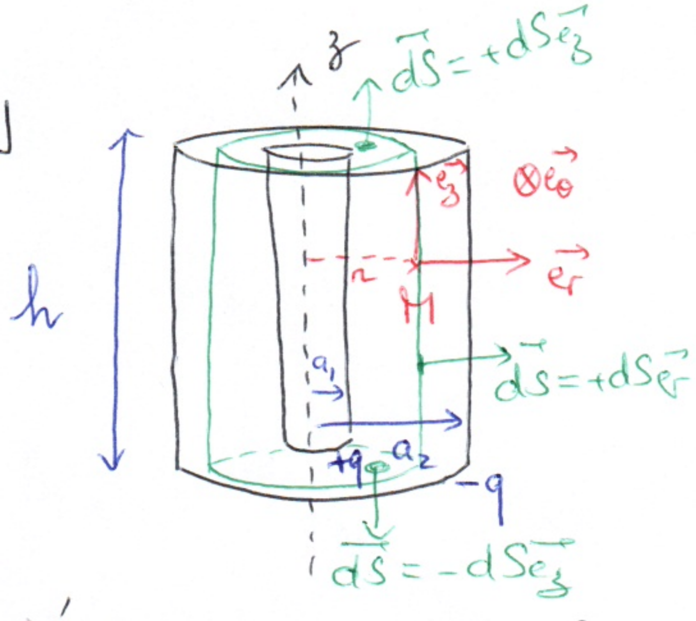
Un exercice à mettre en regard du calcul de la capacité d'un condensateur plan fait à la fin du chapitre EM2. Pour rappel, on avait trouvé



$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$$

ce qui pourra nous servir pour vérifier l'homogénéité de notre résultat à la question 3).

1)



On suppose les cylindres infinis dans la direction z pour les considérations de symétrie et d'invariance ($\Leftrightarrow$ on néglige les "effets de bord").

<u>Étude des symétries</u> : Les plans $(M, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ et $(M, \vec{e_r}, \vec{e_z})$ sont des plans de symétrie des charges donc de $\vec{E}$ par principe de Curie. Ainsi, $\vec{E}$ appartient à ces plans et

$$\vec{E} = E\vec{e_r}$$

<u>Étude des invariances</u> : La distribution de charges est invariante par translation suivant z et par rotation suivant θ. Par principe de Curie, $\vec{E}$ ne peut pas dépendre de ces variables

d'où $\vec{E}(r, \cancel{\theta}, \cancel{z}) = \vec{E}(r)$

finalement

$$\vec{E} = E(r)\,\vec{e_r}$$

<u>Théorème de Gauss</u> : $\displaystyle\oiint \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}.$

On l'applique sur le cylindre d'axe (Oz), de hauteur h, passant par M.

Alors d'une part

$$\oiint \vec{E}\cdot\vec{dS} = \iint_{lat} \vec{E}\cdot\vec{dS} + \iint_{haut} \underbrace{\vec{E}\cdot\overset{= +dS\vec{e_z}}{\vec{dS}}}_{\substack{=0 \\ \text{car } \perp}} + \iint_{bas} \underbrace{\vec{E}\cdot\overset{= -dS\vec{e_z}}{\vec{dS}}}_{=0 \text{ idem}}$$

$$= \iint E(r)\,\vec{e_r}\cdot dS\,\vec{e_r}$$

$$= E(r)\,2\pi r h$$

D'autre part, $Q_{int} = +q$ (on entoure l'entièreté de la charge du cylindre intérieur)

D'où $\boxed{\vec{E}(r) = \dfrac{q}{2\pi h r \varepsilon_0}\,\vec{e_r}}$ pour $a_1 < r < a_2$.

si $r < a_1$: $Q_{int} = 0$ donc $E(r) = 0$

si $r > a_2$: $Q_{int} = +q - q = 0$ donc $E(r) = 0$ aussi

Le champ est nul à l'extérieur du condensateur.

2) On obtient le potentiel par sa définition

$$\vec{E} = -\vec{grad}\, V$$

soit, en projetant (et on regarde entre a_1 et a_2)

$$\left|\begin{array}{c} \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 r h} \\ 0 \\ 0 \end{array}\right. = - \left|\begin{array}{c} \dfrac{\partial V}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} \end{array}\right. \quad \text{d'où} \quad V(r, \cancel{\theta}, \cancel{z})$$

puis la 1ère projection donne

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r h} \quad \text{soit en intégrant}$$

$$V(r) = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln r + C^{te}.$$

Les conditions aux limites

$$\begin{cases} V(r=a_1) = V_1 \\ V(r=a_2) = V_2 \end{cases}$$

donnent
$$\begin{cases} -\dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 h} \ln a_1 + Cste = V_1 \\ -\dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 h} \ln a_2 + Cste = V_2 \end{cases}$$

d'où
$$\boxed{V_1 - V_2 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 h} \ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right)}$$

3) Par définition, la capacité est telle que

$$V_1 - V_2 \equiv \frac{q}{C}$$

Par identification

$$\boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right)}}$$

(bien homogène à $\frac{\varepsilon_0 S}{e}$, on rappelle que $\ln(\,)$ est sans dimension)