EM1-TD

Correction

EM1 — 03 Détermination d'une répartition de charge

On commence par deux rappels mathématiques.

▶ **1. Intégration sur un volume en coordonnées sphériques.** L'exercice fait travailler sur une distribution de charge **non uniforme**, de sorte que pour obtenir la charge à l'intérieur d'une boule de rayon a, on ne peut pas écrire $Q_{\text{int}} = \varrho V$. Il faut revenir à la définition et intégrer :

$$Q_{\text{int}} = \iiint \varrho(r)\,\mathrm{d}V$$

Intégrer sur un volume en coordonnées sphériques n'est pas exigible dans le cadre du programme de PC. Il est malgré tout intéressant de faire le calcul au moins une fois. Pour cela, on part de l'expression du volume infinitésimal $\mathrm{d}V = r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$ en sphérique (qui n'est pas à connaître). Alors

$$Q_{\text{int}} = \iiint \varrho(r)\,r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\right)}_{=2\pi}\underbrace{\left(\int_0^{\pi} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right)}_{=2}\left(\int_0^{a} \varrho(r)\,r^2\,\mathrm{d}r\right)$$

d'où

$$\boxed{Q_{\text{int}} = 4\pi \int_0^a \varrho(r)\,r^2\,\mathrm{d}r}$$

Remarque 1. Il faut savoir que pour les coordonnées sphériques, la coordonnée φ (la longitude) varie entre 0 et 2π , tandis que θ (la colatitude) varie de 0 à π.

Remarque 2. Le calcul, donc le résultat, utilise que ϱ ne dépend que de r. S'il dépend aussi de θ et/ou de φ, alors il faut reprendre le calcul de chacune des trois intégrales.

Remarque 3. Le fait d'écrire une intégrale triple comme le produit de trois intégrales simples est une conséquence du théorème de Fubini (que vous voyez en mathématiques dans le cours sur les fonctions de plusieurs variables).

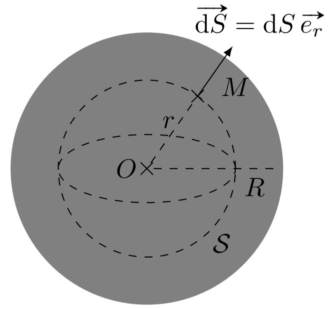
▶ **2. Théorème fondamental de l'analyse.** On utilise aussi dans cet exercice le théorème fondamental de l'analyse (qui fait le lien entre dérivée et intérgrale, comme applications inverses l'une de l'autre)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^x f(u)\,\mathrm{d}u\right) = f(x)$$

---

1) Le système étant à symétrie sphérique, appliquons le théorème de Gauss sur la sphère $\mathcal{S}$ de centre O et de rayon r. Il s'écrit

$$\oiint \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$



Calculons les deux membres de cette égalité séparément. On a d'une part

$$\oiint \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \oiint E_0\,\vec{e_r}\cdot\mathrm{d}S\,\vec{e_r} = E_0 \oiint \mathrm{d}S = 4\pi\,r^2\,E_0$$

D'autre part

$$Q_{\text{int}} = \iiint \varrho\,\mathrm{d}V = 4\pi \int_0^r u^2\,\varrho(u)\,\mathrm{d}u$$

d'après le rappel mathématique précédent. Le théorème de Gauss conduit donc ici à

$$4\,\pi\,r^2\,E_0 = \frac{4\,\pi}{\varepsilon_0}\int_0^r u^2\,\varrho(u)\,\mathrm{d}u$$

Dérivons les deux membres de l'égalité par rapport à r en exploitant le théorème fondamental de l'analyse

$$8\,\pi\,r\,E_0 = \frac{4\,\pi}{\varepsilon_0}r^2\,\varrho(r)$$

Cela nous permet de conclure que

$$\boxed{\varrho(r) = \frac{2\,\varepsilon_0\,E_0}{r}}$$

2) La charge totale Q de la boule est par définition

$$Q = \iiint \varrho\,\mathrm{d}V = 4\,\pi\int_0^R r^2\,\varrho(r)\,\mathrm{d}r$$

On calcule avec la charge volumique de la question 1 que

$$Q = 8\,\pi\,\varepsilon_0\,E_0\int_0^R r\,\mathrm{d}r \qquad \text{soit} \qquad \boxed{Q = 4\,\pi\,\varepsilon_0\,E_0\,R^2}$$

Ensuite, pour calculer le champ électrique à l'extérieur de la boule, il faut revenir à la méthode générale.

Commençons par l'étude des symétries et des invariances de la distribution des charges. Les plans $(M,\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta})$ et $(M,\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\varphi})$ (où M est un point quelconque à l'extérieur de la boule chargée et les trois vecteurs sont ceux du système de coordonnées sphérique) sont des plans de symétries de la distribution des charges (ils coupent la boule en deux). Ce sont donc par principe de Curie également des plans de symétrie du champ électrique. Par conséquent ce dernier appartient à ces plans : il est porté par $\overrightarrow{e_r}$.

$$\overrightarrow{E} = E_e(r,\theta,\varphi)\,\overrightarrow{e_r}$$

Par ailleurs, la distribution de charge est sphérique donc invariante par rotation d'angle θ et φ : le champ électrique ne peut pas dépendre de ces variables par principe de Curie.

$$\overrightarrow{E} = E(r)\,\overrightarrow{e_r}$$

Nous pouvons alors appliquer le théorème de Gauss à l'extérieur de la boule

$$\oiint \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

On calcule alors d'une part, en prenant la sphère de rayon $r > R$ comme surface de Gauss,

$$\oiint \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = 4\,\pi\,r^2\,E(r)$$

et d'autre part

$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = 4\,\pi\,R^2\,E_0$$

ce qui conduit à

$$E(r) = E_0\,\frac{R^2}{r^2}$$

et finalement

$$\boxed{\overrightarrow{E} = E(r)\,\overrightarrow{e_r} = E_0\,\frac{R^2}{r^2}\,\overrightarrow{e_r} \qquad \text{à l'extérieur de la boule.}}$$

Remarque 1. Un exercice « classique » consiste à déterminer le champ $\overrightarrow{E}$ créé par une distribution de charges Q. On applique pour cela méthode détaillée dans le cours *(étude des symétries, des invariances, puis théorème de Gauss : c'est ce qu'on fait à la fin de la question 2)*. Ici, la question 1 de l'exercice est « posée à l'envers » : on vous donne $\overrightarrow{E}$ et il faut déterminer les charges Q qui l'engendrent !

Remarque 2. À l'extérieur de la boule, le champ est **le même que celui créé par une charge ponctuelle**

$$\overrightarrow{E} = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\,\overrightarrow{e_r}$$

comme si toute la charge Q était concentrée au point O. Cela est une conséquence du théorème de Gauss qui indique que c'est la charge totale Q_{int} qui compte, et pas la manière dont elle est répartie dans le volume !