EM1-TD

Correction

EM1 — 01 Un modèle électrostatique de la molécule H_2

(Théorème de superposition, théorème de Gauss, équilibre mécanique)

1) On note G le noyau de gauche et D le noyau de droite. Considérons comme système le noyau de droite D. Ce noyau est soumis à deux champs extérieurs :

— celui du nuage électronique $\overrightarrow{E_e}$;

— et celui de l'autre noyau, celui de gauche G, $\overrightarrow{E_n}$.

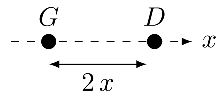
Calculons ces deux champs.

▶ Le second est créé par une charge ponctuelle. Son champ est alors donné par la **loi de Coulomb**

$$\overrightarrow{E_n} = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\,\overrightarrow{e_r}$$

Au niveau du système (le noyau de droite D), puisque $r = 2\,x$ et $\overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{e_x}$, ce champ vaut

$$\boxed{\overrightarrow{E_n} = \frac{q}{16\,\pi\,\varepsilon_0\,x^2}\,\overrightarrow{e_x}}$$



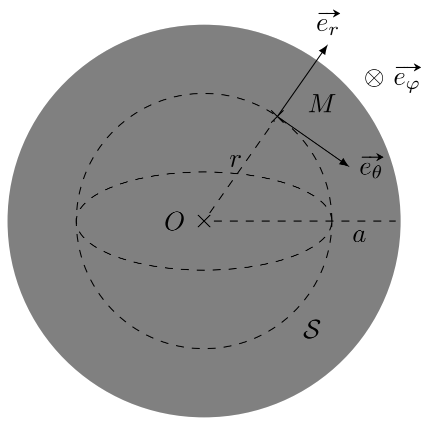
▶ Le premier est créé par le nuage électronique. Dans le cadre de cet exercice, ce nuage est modélisé par une boule sphérique uniformément chargée. La densité volumique de charge est

$$\varrho = \frac{Q_{\text{boule}}}{V_{\text{boule}}} = \frac{-2\,q}{V_{\text{boule}}} = \frac{-6\,q}{4\,\pi\,a^3} \qquad \text{car} \qquad V_{\text{boule}} = \frac{4}{3}\,\pi\,a^3$$

Sachant cela, calculons le champ créé par le nuage à l'aide du théorème de Gauss.

Commençons par l'étude des symétries et des invariances de la distribution des charges. Les plans $(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ et $(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\varphi})$ (où M est un point quelconque dans le nuage et les trois vecteurs sont ceux du système de coordonnées sphérique) sont des plans de symétries de la distribution des charges (ils coupent la boule en deux). Ce sont donc par principe de Curie également des plans de symétrie du champ électrique. Par conséquent ce dernier appartient à ces plans : il est porté par $\overrightarrow{e_r}$.

$$\overrightarrow{E_e} = E_e(r, \theta, \varphi)\,\overrightarrow{e_r}$$



Par ailleurs, la distribution de charge est sphérique donc invariante par rotation d'angle θ et φ : le champ électrique ne peut pas dépendre de ces variables par principe de Curie.

$$\overrightarrow{E_e} = E_e(r)\,\overrightarrow{e_r}$$

Le calcul du flux du champ électrique à travers une sphère $\mathcal{S}$ de centre O et de rayon $r < a$ donne alors

$$\oiint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{E_e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \oiint_{\mathcal{S}} E_e(r)\,\overrightarrow{e_r}\cdot\mathrm{d}S\,\overrightarrow{e_r} = \oiint_{\mathcal{S}} E_e(r)\,\mathrm{d}S = E_e(r)\oiint_{\mathcal{S}}\mathrm{d}S = 4\,\pi\,r^2\,E_e(r)$$

Par ailleurs, le calcul de la charge Q_{int} à l'intérieur de cette sphère homogène conduit à

$$Q_{\text{int}} = \frac{4}{3}\,\pi\,r^3\,\varrho = \frac{-2\,q\,r^3}{a^3}$$

L'application du théorème de Gauss sur la sphère $\mathcal{S}$ de centre O et de rayon $r < a$ permet de conclure que

$$4\,\pi\,r^2\,E_e(r) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{-2\,q\,r^3}{\varepsilon_0\,a^3} \qquad \text{soit} \qquad E_e(r) = \frac{-q\,r}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,a^3}$$

Et finalement

$$\overrightarrow{E_e} = -\frac{q\,r}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,a^3}\,\overrightarrow{e_r}$$

Au niveau du système, puisque cette fois $r = x$ et $\overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{e_x}$, ce champ vaut ainsi

$$\boxed{\overrightarrow{E_e} = -\frac{q\,x}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,a^3}\,\overrightarrow{e_x}}$$

Finalement, le théorème de superposition permet d'écrire le champ électrique total auquel est soumis le noyau D comme la somme des deux champs précédents

$$\overrightarrow{E_{\text{tot}}} = \overrightarrow{E_n} + \overrightarrow{E_e} = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{1}{4\,x^2} - \frac{2\,x}{a^3}\right)\overrightarrow{e_x}$$

et la force est évidemment donnée par la formule de Lorentz

$$\boxed{\overrightarrow{F} = q\,\overrightarrow{E_{\text{tot}}} = \frac{q^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{1}{4\,x^2} - \frac{2\,x}{a^3}\right)\overrightarrow{e_x}}$$

2) À l'équilibre, le noyau D n'a pas d'accélération donc la résultante des forces qui s'exercent sur lui est nulle :

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$$

On calcule

$$\frac{1}{4\,x^2} - \frac{2\,x}{a^3} = 0 \qquad \text{soit} \qquad x^3 = \frac{a^3}{8} \qquad \text{d'où} \qquad x_{\text{eq}} = \frac{a}{2}$$

La longueur de la liaison à l'équilibre est

$$\boxed{\ell_{\text{eq}} = 2\,x_{\text{eq}} = a}$$

Remarque 1. On pourrait aussi adopter un raisonnement énergétique. À l'équilibre, l'énergie potentielle E_p est extrémale (maximale pour un équilibre stable) donc

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = 0 \qquad \text{en } x = x_{\text{eq}}$$

Mais l'énergie potentielle d'une charge q dans un potentiel V est $E_p = q\,V$. Il suffit donc de déterminer les potentiels V_n et V_e engendrés par les deux champs du nuage et du noyau G. On fait cela en utilisant

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$$

On trouve rapidement, en projetant sur $\overrightarrow{e_x}$ puis en intégrant chacun des deux champs

$$V_n = \frac{q}{16\,\pi\,\varepsilon_0\,x} \qquad \text{et} \qquad V_e = \frac{q\,x^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,a^3}$$

(Les potentiels sont définis à une constante près, qui n'interviendront pas à la fin puisqu'on calculera la dérivée $\mathrm{d}E_p\,/\,\mathrm{d}x$ et que les dérivées des constantes sont nulles. On prend donc ces constantes nulles dès le départ).

D'où

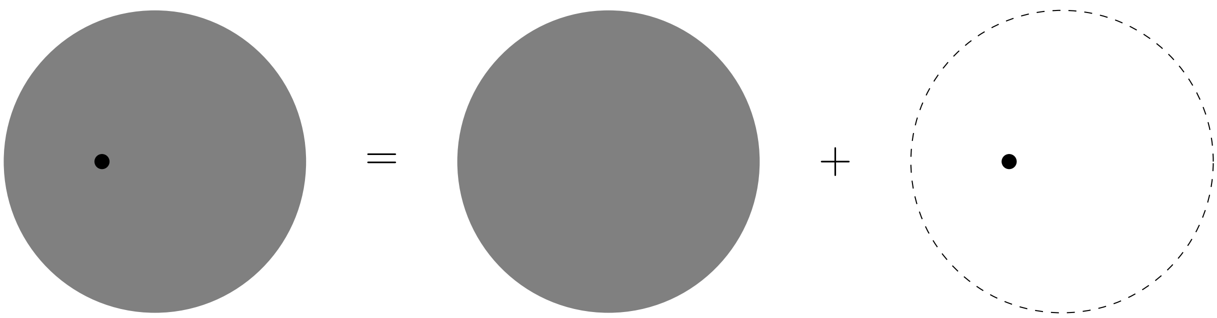
$$E_p = q\,(V_n + V_e) = \frac{q^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{1}{4\,x} + \frac{x^2}{a^3}\right) \qquad \text{et donc} \qquad \frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = \frac{q^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{4\,x^2} + 2\,\frac{x}{a^3}\right)$$

La condition d'équilibre $\mathrm{d}E_p\,/\,\mathrm{d}x = 0$ conduit alors à

$$-\frac{1}{4\,x^2} + 2\,\frac{x}{a^3} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{x^3}{a^3} = \frac{1}{8} \qquad \text{et} \qquad x_{\text{eq}} = \frac{a}{2}$$

On retrouve bien sûr le même résultat.

Remarque 2. Illustrons le théorème de superposition utilisé dans cet exercice. La distribution de charges vue par le noyau D est



Nuage et noyau G **Nuage seul** **Noyau G seul**

donc $\overrightarrow{E_{\text{tot}}} = \overrightarrow{E_e} + \overrightarrow{E_n}$