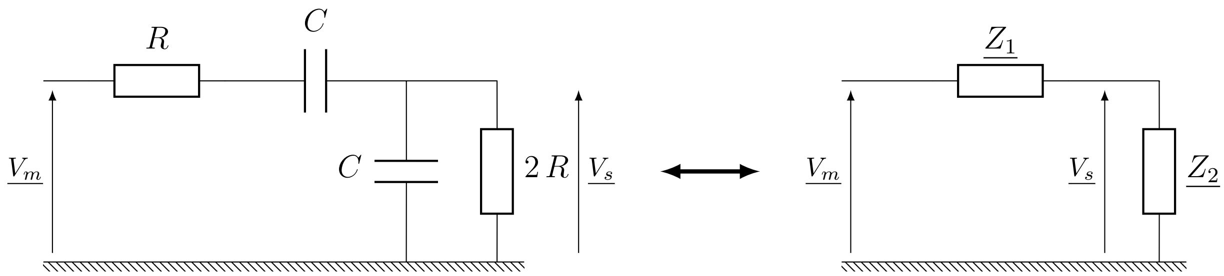
E4-TD

Correction

E4 — 01 Oscillateur électronique

1) En terme d'impédances complexes, le filtre de droite est équivalent à



avec

$$\underline{Z_1} = R + \frac{1}{\mathrm{j}\,C\,\omega} \qquad \text{et} \qquad \underline{Z_2} = \frac{2\,R}{1 + 2\,\mathrm{j}\,R\,C\,\omega}$$

Il n'y a aucun courant qui part dans le fil de bouclage puisque $\underline{i_e} = 0$. On peut donc appliquer la formule du pont diviseur de tension

$$\boxed{\underline{V_s} = \frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}\,\underline{V_m} \qquad \text{soit} \qquad \underline{V_s} = \underline{\mathcal{H}}(\mathrm{j}\,\omega)\,\underline{V_m} \qquad \text{avec} \qquad \underline{\mathcal{H}}(\mathrm{j}\,\omega) = \frac{1}{\dfrac{5}{2} + \mathrm{j}\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{2\,\omega}\right)}}$$

C'est un filtre **passe-bande** car $\underline{V_s}$ tend vers 0 pour $\omega \to 0$ et $\omega \to \infty$ (notons que c'est un argument plutôt grossier, on apprécierait regarder plus rigoureusement le module de $\underline{V_s}$...). Et c'est un filtre du **deuxième ordre** puisqu'il contient deux condensateurs (à nouveau, un argument plus rigoureux serait de voir que la fonction de transfert se réécrit

$$\underline{V_s} = \frac{2\,\mathrm{j}\,\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1 - 2\,\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} + 5\,\mathrm{j}\,\dfrac{\omega}{\omega_0}}\,\underline{V_m}$$

et, sous cette forme de fraction rationnelle en $\mathrm{j}\,\omega$, on a un polynôme de degré 2 au dénominateur).

2) On a ainsi

$$\underline{V_m} = \beta\,\underline{V_e}, \qquad \underline{V_s} = \underline{\mathcal{H}}(\mathrm{j}\,\omega)\,\underline{V_m} \qquad \text{et} \qquad \underline{V_s} = \underline{V_e}$$

soit finalement

$$\underline{V_e} = \beta\,\underline{\mathcal{H}}(\mathrm{j}\,\omega)\,\underline{V_e} \tag{1}$$

Pour que cette équation soit vérifiée, il faut $\underline{V_e} = 0$, qui est une solution sans intérêt pour nous (pas de signal dans le circuit), ou bien

$$\boxed{\beta\,\underline{\mathcal{H}}(\mathrm{j}\,\omega) = 1}$$

C'est **la condition d'oscillation**, nécessaire pour avoir un signal non nul dans le circuit. Cette équation se réécrit

$$\beta = \frac{5}{2} + \mathrm{j}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{2\,\omega}\right) \tag{2}$$

et puisque β est réèl, elle impose

$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{2\,\omega} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}}$$

Si un signal sinusoïdal existe dans le circuit, il oscille forcément à cette pulsation.

3) Repartons de l'équation **(1)**. Elle s'écrit aussi

$$\frac{5}{2} + \mathrm{j}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{2\,\omega}\right)\underline{V_e} = \beta\,\underline{V_e}$$

En multipliant par $\mathrm{j}\,\omega\,\omega_0$, on obtient

$$-\omega^2\,\underline{V_e}+\frac{5}{2}\,\mathrm{j}\,\omega\,\omega_0\,\underline{V_e}+\frac{\omega_0^2}{2}\,\underline{V_e}=\mathrm{j}\,\omega\,\omega_0\,\beta\,\underline{V_e}$$

Il suffit alors de repasser en réèl en utilisant les règles

$$\mathrm{j}\,\omega \leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \qquad \text{et} \qquad -\,\omega^2 \leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}$$

On aboutit à

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 V_e}{\mathrm{d}t^2}+\left(\frac{5}{2}-\beta\right)\,\omega_0\,\frac{\mathrm{d}V_e}{\mathrm{d}t}+\frac{\omega_0^2}{2}\,V_e=0}$$

et la solution est purement sinusoïdale si

$$\boxed{\beta=\frac{5}{2}}$$

car alors l'équation est celle d'un oscillateur harmonique (de pulsation $\omega=\omega_0\,/\,\sqrt{2}$ évidemment !). On aurait pu obtenir directement cette relation en identifiant les parties réelles de la condition d'oscillation **(2)**.