DS1 Problème 3 PC et PSI

19/ L'air étant modélisée par un gaz parfait, on a

$$PV = nRT \quad \text{d'où} \quad P = \frac{nRT}{V}$$

or $n = \dfrac{m}{M_a}$ et $\rho = \dfrac{m}{V}$ la masse volumique.

D'où

$$\boxed{P = \rho \frac{RT}{M_a}}$$

20/ Un gaz parfait en évolution isentropique suit les lois de Laplace

$$\boxed{\rho^{1-\gamma} T^{\gamma} = Cte}$$

21/ Dérivons la loi de Laplace par rapport à z :

$$\frac{d}{dz}\left(\rho^{1-\gamma} T^{\gamma}\right) = 0 \quad \text{soit} \quad (1-\gamma)\frac{d\rho}{dz}\rho^{-\gamma}T^{\gamma} + \gamma \rho^{1-\gamma}\frac{dT}{dz}T^{\gamma-1} = 0$$

En divisant par $T^{\gamma-1}\rho^{1-\gamma}$, on a donc

$$(1-\gamma)\frac{d\rho}{dz}T\rho^{-1} + \gamma\frac{dT}{dz} = 0$$

or $T\rho^{-1} = \dfrac{T}{\rho} = \dfrac{M_a T}{\rho R T} = \dfrac{M_a}{\rho R}$

& 19

1

et donc

$$\boxed{(1-\gamma)\frac{M_a}{\rho R}\frac{dp}{dz} = -\gamma\frac{dT}{dz}}$$ (c'est la D)

<u>2.2)</u> si $\dfrac{dp}{dz} = -\rho g$, alors d'après 2.1 on a

$$\frac{dT}{dz} = \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{M_a}{\rho R}(-\rho g) = -\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{M_a g}{R}$$

D'où, en <u>intégrant directement</u> (le membre de droite est une constante)

$$T(z) = \frac{1-\gamma}{\gamma}\frac{M_a g}{R} z + C^{te}$$

et $T(0) \equiv T_0$ d'après l'énoncé, donc $C^{te} = T_0$

alors

$$T(z) = T_0\left(1 + \frac{1-\gamma}{\gamma}\frac{M_a g}{R T_0} z\right)$$

soit $\boxed{H = -\dfrac{\gamma R T_0}{(1-\gamma)M_a g}}$ par identification avec

$$\boxed{T(z) = T_0\left(1 - \frac{z}{H}\right)}$$ (c'est la C et la B...)

23) D'après 20), $P^{1-\gamma} T^{\gamma} = C^{te}$

or $P = \dfrac{\rho R T}{M_a}$ d'après 19), donc

$$\rho^{1-\gamma} T = C^{te\prime}$$

Soit, en particulier $\boxed{\rho(z)^{1-\gamma} T(z) = \rho(0)^{1-\gamma} T(0)}$

donc

$$\rho(z)^{1-\gamma} = \frac{\rho_0^{1-\gamma} \cancel{T_0}}{\cancel{T_0}\left(1 - \frac{z}{H}\right)} \quad \text{d'après 22)}$$

et finalement

$$\boxed{\rho(z) = \rho_0 \left(1 - z/H\right)^{-\frac{1}{1-\gamma}}} \qquad (\text{c'est la D})$$

24) $H = \dfrac{\gamma R T_0}{(\gamma - 1) M_a g}$ AN $\boxed{H \simeq 30 \text{ km}}$

et $\dfrac{dT}{dz} = -\dfrac{T_0}{H} = \dfrac{(1-\gamma) M_a g}{\gamma R}$ AN $\boxed{\dfrac{dT}{dz} = -10 \text{ K.km}^{-1}}$

Rq Dans le cours, on suppose les transformations de l'air isothermes.
Ici, dans un modèle plus réaliste, on les suppose isentropiques, ce qui complexifie un peu les calculs.

3