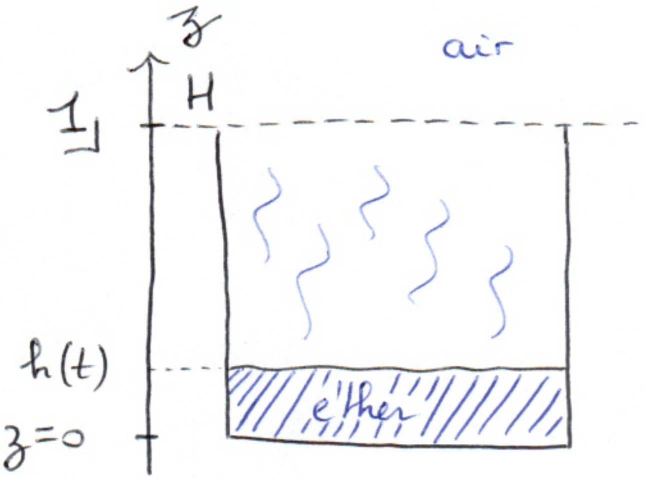
D1-08 Évaporation d'éther



L'éther est connu pour être un liquide très volatile. L'exercice propose un modèle d'évaporation qui permet de calculer le temps au bout duquel l'éther est entièrement volatilisé.

L'énoncé évoque une hypothèse de (quasi)-stationnarité. Entre $z = h$ et $z = H$, le gradient de concentration en éther (il y en a beaucoup proche de l'interface avec l'éther liquide, et il n'y en a plus dans l'air pour $z = H$) provoque une densité particulaire $n(z)$ qui respecte l'équation du cours

$$D \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} = \frac{\partial n}{\partial t} = 0 \quad \text{[en stationnaire]}$$

d'où $$\frac{d^2 n}{dz^2} = 0 \quad \text{soit} \quad n(z) = Az + B.$$

Rq L'équation du cours est respectée car il n'y a pas de création et/ou destruction de particules d'éther dans l'air.

La pression partielle en éther P_e s'écrit

en moles ⚠ "le notre", en m^{-3}

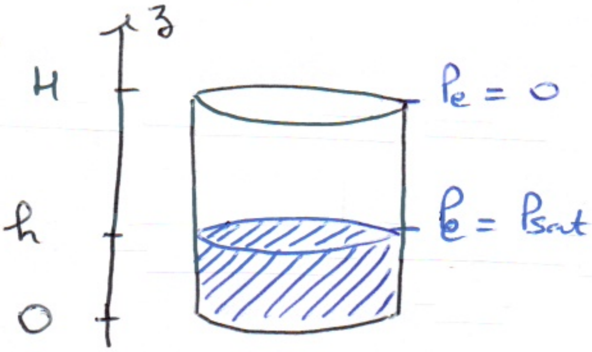
$$P_e = \text{"}\frac{n R T}{V}\text{"} = n \frac{RT}{N_A}$$

[C'est une loi de Dalton sur les pressions partielles]

⚠ notre "n" est en m^{-3} ! Ne pas le confondre avec le n de la loi des gaz parfaits !

d'où les conditions aux limites

$$\begin{cases} P_e = 0 \text{ en } z = H \Rightarrow n(z=H) = 0 \\ P_e = P_{sat} \text{ en } z = h(t) \Rightarrow n(z=h) = \dfrac{P_{sat} N_A}{RT} \end{cases}$$



$$n = \frac{N}{V} = \frac{n \times N_A}{V}$$

en m^{-3} — nombre — volume — en moles

Puisque $n(z) = Az + B$, on trouve les constants d'intégration avec les deux conditions aux limites préalablement mentionnées

$$\begin{cases} AH + B = 0 \\ Ah + B = \dfrac{P_{sat} N_A}{RT} \end{cases}$$

Soit $B = -AH$ et donc

$$A(h-H) = \frac{P_{sat} N_A}{RT}$$

finalement $A = \dfrac{P_{sat} N_A}{RT(h-H)}$ et $B = \dfrac{P_{sat} H}{RT} \dfrac{1}{H-h}$

d'où

$$\boxed{n(z) = \frac{P_{sat} \mathcal{N}_A}{RT}\left(\frac{H - z}{H - h}\right)}$$

2) Une fois n connu, on déduit le flux ϕ en passant par la densité surfacique de flux $\vec{j_N}$:

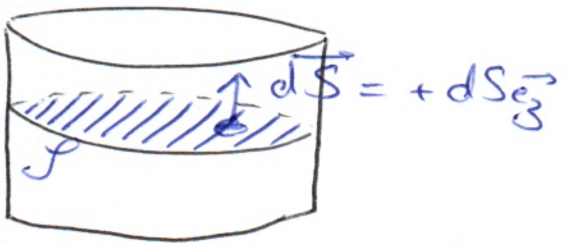
$$\vec{j_N} = -D\, \vec{\text{grad}}\, n = -D \frac{dn}{dz} \vec{e_z} \quad (\text{à } 1D)$$

d'où

$$\vec{j_N} = \frac{D P_{sat} \mathcal{N}_A}{RT(H-h)} \vec{e_z}$$

{ Rq Constant ! Normal car il y a conservation du flux en régime stationnaire !

et



$$\phi \equiv \iint_{\mathcal{S}} \vec{j_N} \cdot \vec{dS}$$

d'où

$$\boxed{\phi = \frac{D P_{sat} \mathcal{N}_A S}{RT(H-h)}}$$

(> 0, les particules montent donc le flux vers le haut est effectivement attendu > 0).

3) ϕ est un flux de particules (en s^{-1}). Il correspond au nombre de particules d'éther liquide qui passent en phase gaz par unité de temps. Pendant une durée dt, il y a ϕdt particules qui quittent le liquide.

On note $dN = \phi\, dt$. Ces particules correspondent à un volume

$$dV = \frac{\text{"masse"}}{\text{"masse volumique"}} = \frac{\text{"masse molaire} \times \text{nombre de mols"}}{\text{"masse volumique"}}$$

Soit

$$dV = \frac{M \times \frac{dN}{\mathcal{N}_A}}{\mu} = \frac{dN\, M}{\mu \mathcal{N}_A} = \frac{M}{\mu \mathcal{N}_A} \phi\, dt$$

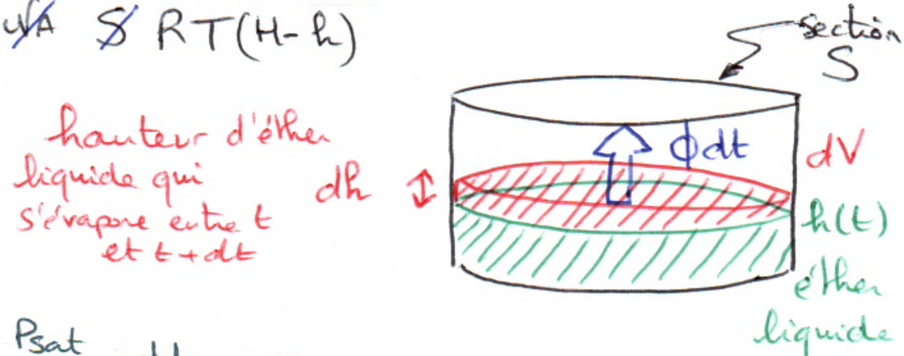
avec $\mathcal{N}_A$ le nombre d'Avogadro.

Le volume dV correspond à une hauteur $dh = -\frac{dV}{S}$

d'où

$$dh = -\frac{M}{\mu \cancel{\mathcal{N}_A}} \frac{D\, P_{sat} \cancel{\mathcal{N}_A} \cancel{S}}{\cancel{S} RT(H-h)} dt$$

$h \downarrow$ donc $dh < 0$.



et en séparant les variables

$$(H-h)\, dh = -\frac{M D\, P_{sat}}{\mu\, RT} dt$$

d'où, en intégrant entre $t=0$ ($h = h_0$) et t ($h = h(t)$) :

$$\boxed{(H-h_0)^2 - (H-h(t))^2 = -\frac{2MD}{\mu RT} P_{sat}\, t}$$

et il est délicat d'isoler $h(t)$ [polynôme de degré 2].

4) L'éther est entièrement évaporé lorsque $h(\tau) = 0$,

soit

$$(H - h_0)^2 - H^2 = - \frac{2MD}{\mu RT} P_{sat} \tau$$

donc

$$\boxed{\tau = \frac{\mu RT}{2MD P_{sat}} \left(H^2 - (H - h_0)^2\right)}$$

L'application numérique donne

$$\tau = \frac{626 \times 8{,}314 \times 293 \times \left[(8 \times 10^{-2})^2 - (3 \times 10^{-2})^2\right]}{2 \times (74{,}1 \times 10^{-3}) \times (1{,}5 \times 10^{-5}) \times (0{,}58 \times 10^5)}$$

soit $\tau = 65 \times 10^3$ s

et donc $\boxed{\tau \simeq 18 \text{ h}}$

Rq Ce qui semble un peu long pour l'évaporation d'éther, mais il y a quand même 5cm ! initialement