D1-TD

Correction

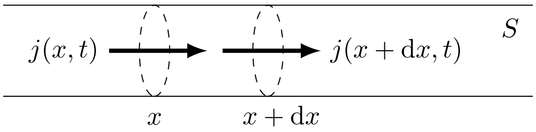
D1 — 07 Réacteur nucléaire 2

1) L'énoncé précise que la loi phénoménologique de Fick est bien vérifiée ici. Le système étant unidimensionnel, elle s'écrit

$$j(x,t) = -D\,\frac{\partial n}{\partial x}$$

Ensuite, il nous faut exploiter la conservation des particules en dressant un bilan. Contrairement au cas du cours, il y a ici un terme de production et un terme d'absorption de neutrons. Il faut donc veiller à bien les prendre en compte dans le bilan.

Démarrons le bilan. On choisit comme système la portion entre x et $x + \mathrm{d}x$ du réacteur nucléaire.



La variation d^2N du nombre de neutrons dans ce système entre t et $t + \mathrm{d}t$ s'exprime déjà comme

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^2N &= \mathrm{d}N(t+\mathrm{d}t) - \mathrm{d}N(t) \\ &= n(x,t+\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}V - n(x,t)\,\mathrm{d}V && \text{(où } \mathrm{d}V = S\,\mathrm{d}x \text{ est le volume du système)} \\ &= \frac{\partial n}{\partial t}\,\mathrm{d}t\,S\,\mathrm{d}x && \text{(développement limité à l'ordre 1 de } n(x,t+\mathrm{d}t) \text{ en } t\text{)} \end{aligned}$$

Ensuite, cette même variation entre t et $t + \mathrm{d}t$ s'écrit aussi « ce qui est rentré en x » − « ce qui est sorti en $x + \mathrm{d}x$ » + « ce qui a été produit » − « ce qui a été absorbé » d'où

$$\mathrm{d}^2N = \mathrm{d}N_e - \mathrm{d}N_s + \mathrm{d}N_p - \mathrm{d}N_a$$

avec des notations explicites. Les termes de création et de destruction sont précisés par l'énoncé :

$$\mathrm{d}N_a = \frac{n}{\tau}\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t = \frac{n}{\tau}\,S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

et

$$\mathrm{d}N_p = K\,\mathrm{d}N_a = K\,\frac{n}{\tau}\,S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

Pour les termes de flux, on a par définition du vecteur densité de courant de particules

$$\mathrm{d}N_e = j(x,t)\,S\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}N_s = j(x+\mathrm{d}x,t)\,S\,\mathrm{d}t$$

si bien que

$$\mathrm{d}^2N = -\frac{\partial j}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,S\,\mathrm{d}t + \frac{(K-1)\,n}{\tau}\,S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

Les deux écritures de d^2N conduisent ainsi à l'équation de conservation

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = \frac{(K-1)\,n}{\tau}$$

En utilisant la loi de Fick, on obtient l'équation de diffusion avec terme de production et d'absorption

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{(K-1)\,n}{\tau}} \qquad (1)$$

2) En régime stationnaire, $\partial n\,/\,\partial t = 0$ donc l'équation de diffusion se restreint à

$$\frac{\mathrm{d}^2 n}{\mathrm{d}x^2} + \frac{K-1}{D\,\tau}\,n = 0$$

Puisque $K > 1$, c'est une équation d'oscillateur harmonique. Elle se résout en

$$n(x) = A\,\cos(k\,x) + B\,\sin(k\,x) \qquad \text{avec} \qquad k = \sqrt{\frac{K-1}{D\,\tau}} > 0$$

Les conditions $n(\pm a) = 0$ exigent

$$\begin{cases} A\,\cos(k\,a) + B\,\sin(k\,a) & = & 0 \\ A\,\cos(k\,a) - B\,\sin(k\,a) & = & 0 \end{cases}$$

ce qui conduit à $B = 0$. Dès lors, A ne peut pas être nul également (sinon $n = 0$ et il n'y a pas de neutrons...) ce qui implique la nullité du cosinus :

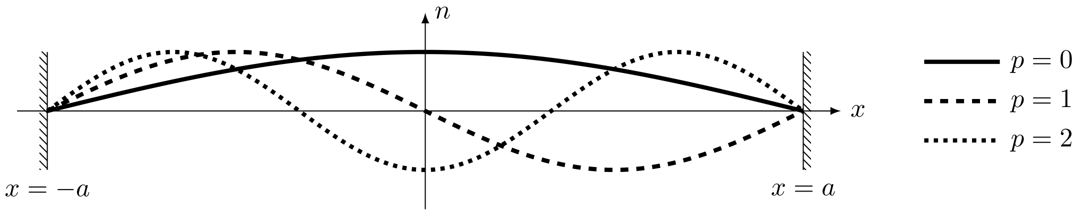
$$\cos(k\,a) = 0 \qquad \text{soit} \qquad k_p = \left(p + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{a} \qquad \text{avec} \qquad p \in \mathbb{N} \qquad (\text{car } k > 0).$$

La méthode employée est typiquement similaire à celle qu'on exploiterait pour établir les modes propres d'une corde vibrante fixée à ses deux extrémités. Voir le chapitre O2.

D'où l'existence a priori de plusieurs solutions

$$n_p(x) = A_p\,\cos\left(\left(p + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi\,x}{a}\right) \qquad \text{avec} \qquad p \in \mathbb{N}.$$

Traçons en quelques-unes :



Ici, n représente une densité volumique de neutrons, elle ne peut donc **pas être négative**. On voit que seule la solution $p = 0$ ne prend jamais de valeur négative, si bien que **c'est la seule solution physiquement acceptable** ici. Finalement

$$n(x) = n_{p=0}(x) = A_0\,\cos\left(\frac{\pi\,x}{2\,a}\right)$$

et la condition $n(0) = n_0$ donne $A_0 = n_0$ d'où

$$\boxed{n(x) = n_0\,\cos\left(\frac{\pi\,x}{2\,a}\right)}$$

3) On ne se place plus en régime stationnaire. On revient donc à l'équation générale (1)

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{(K-1)\,n}{\tau}$$

En posant $n(x,t) = f(x)\,\mathrm{e}^{-t/T}$ comme l'énoncé, l'équation devient

$$-\frac{1}{T}\,f(x) = D\,f''(x) + \frac{K-1}{\tau}\,f(x)$$

soit

$$f''(x) + \left(\frac{K-1}{D\,\tau} + \frac{1}{D\,T}\right)f(x) = 0$$

C'est aussi une équation d'oscillateur harmonique. Les solutions s'écrivent cette fois

$$f(x) = A\,\cos(k'\,x) + B\,\sin(k'\,x) \qquad \text{avec} \qquad k' = \sqrt{\frac{K-1}{D\,\tau} + \frac{1}{D\,T}}$$

Les mêmes conditions aux limites conduisent à la même quantification

$$k'_p = \left(p + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{a}$$

et à nouveau la seule solution physique (car $n > 0$ donc $f > 0$) est le cas $p = 0$, ce qui amène à

$$k' = \frac{\pi}{2\,a} \qquad \text{et donc} \qquad \frac{K-1}{D\,\tau} + \frac{1}{D\,T} = \frac{\pi^2}{4\,a^2}$$

Isolons T :

$$T = \frac{1}{D\left(\dfrac{\pi^2}{4\,a^2} - \dfrac{K-1}{D\,\tau}\right)}$$

Si $T < 0$, la solution $n(x,t) = f(x)\,\mathrm{e}^{-t/T}$ diverge exponentiellement : c'est une **instabilité** (dans ce contexte de production de neutrons dans un réacteur, on parle de **réaction en chaîne explosive**). La stabilité du système est au contraire assurée si $T > 0$, donc si

$$\frac{\pi^2}{4\,a^2} > \frac{K-1}{D\,\tau} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \boxed{2\,a < \pi\sqrt{\frac{D\,\tau}{K-1}}}$$