D1-TD

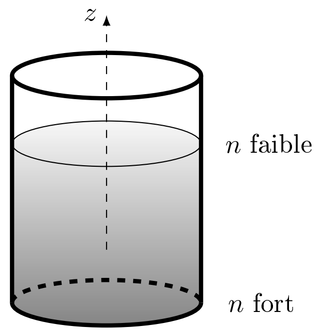
Correction

D1 — 05 Relation d'Einstein

1) Directement par la loi de Fick $\vec{\jmath_d} = -D\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,n$ on calcule

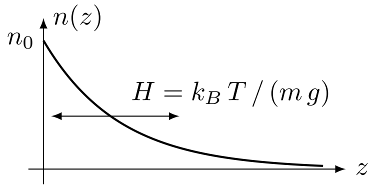
$$\vec{\jmath_d} = -D\,\frac{\partial n}{\partial z}\,\vec{e_z} = \frac{m\,g\,D}{k_B\,T}\,n_0\,\exp\left(-\frac{m\,g\,z}{k_B\,T}\right)\,\vec{e_z} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\vec{\jmath_d} = \frac{m\,g\,D}{k_B\,T}\,n(z)\,\vec{e_z}}$$

Remarquons que le flux de particules est ascendant (suivant $+\vec{e_z}$) ce qui est normal puisqu'il va des zones de fortes concentrations (le fond du récipient) vers les zones de faibles concentrations (le haut du récipient).



2) Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, la « particule moyenne » est soumise à
- son poids $\vec{P} = -m\,g\,\vec{e_z}$ avec $\vec{e_z}$ ascendant ;
- et à la force de frottement fluide $\vec{f} = -6\,\pi\,\eta\,R\,\vec{v}$.

*Remarquons que l'énoncé ne parle pas de la poussée d'Archimède, pourtant évidemment présente. Sa prise en compte changerait seulement la masse m en une masse apparente $m_{app} = m - \varrho_\ell\,V$, mais puisque la masse n'intervient pas dans le résultat final de la question **5)**, on comprend que son « oubli » est sans conséquence. Notons aussi que la loi de frottement fluide proposée, proportionnelle à la vitesse, est seulement valable à bas Reynolds. À plus haut Reynolds en effet, il faut considérer une force proportionnelle à v^2 (voir chapitre H2).*



Le théorème du centre de masse appliqué à la particule s'écrit alors

$$m\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -m\,g\,\vec{e_z} - 6\,\pi\,\eta\,R\,\vec{v}$$

En régime stationnaire, l'accélération est nulle donc la vitesse de la « particule moyenne » est

$$\boxed{\vec{v_m} = -\frac{m\,g}{6\,\pi\,\eta\,R}\,\vec{e_z}}$$

dirigée vers le bas : le poids fait tomber les particules au fond du récipient, on parle de **sédimentation** (c'est une sorte de convection).

3) La densité de courant de sédimentation est d'après l'énoncé

$$\boxed{\vec{\jmath_c} = n(z)\,\vec{v_m} = -n(z)\,\frac{m\,g}{6\,\pi\,\eta\,R}\,\vec{e_z}}$$

En prenant en compte les deux phénomènes de diffusion et de sédimentation on détermine par superposition la densité de courant de particules totale

$$\overrightarrow{\jmath_{\mathrm{tot}}} = \vec{\jmath_d} + \vec{\jmath_c}$$

En régime statique, les particules ne bougent pas donc la densité de courant est nulle $\overrightarrow{\jmath_{\mathrm{tot}}} = \vec{0}$ et ainsi les flux diffusif ascendant et convectif descendant se compensent exactement

$$\boxed{\vec{\jmath_d} = -\vec{\jmath_c}}$$

4) On déduit alors

$$\frac{m\,g\,D}{k_B\,T}\,n(z) = \frac{m\,g}{6\,\pi\,\eta\,R}\,n(z) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{D = \frac{k_B\,T}{6\,\pi\,\eta\,R}}$$

5) L'application numérique donne, avec $k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}\ \mathrm{J\cdot K^{-1}}$ et une température ambiante $T = 293$ K :

$$\boxed{D = 2{,}1 \times 10^{-10}\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}}$$

C'est **exactement l'ordre de grandeur** ($\sim 10^{-10}$) **attendu** pour un coefficient de diffusion dans un liquide.