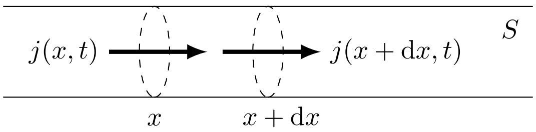
D1-TD

Correction

D1 — 03 Réacteur nucléaire

1) C'est une question de cours. Pour commencer, il nous faut exploiter la conservation des particules en dressant un bilan. On choisit comme système la portion entre x et $x + \mathrm{d}x$ du milieu.



La variation d^2N du nombre de neutrons dans ce système entre t et $t + \mathrm{d}t$ s'exprime déjà comme

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^2N &= \mathrm{d}N(t+\mathrm{d}t) - \mathrm{d}N(t) \\ &= n(x,t+\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}V - n(x,t)\,\mathrm{d}V \qquad &\text{(où } \mathrm{d}V = S\,\mathrm{d}x \text{ est le volume du système)} \\ &= \frac{\partial n}{\partial t}\,\mathrm{d}t\,S\,\mathrm{d}x \qquad &\text{(développement limité à l'ordre 1 de } n(x,t+\mathrm{d}t) \text{ en } t) \end{aligned}$$

Ensuite, cette même variation entre t et $t + \mathrm{d}t$ s'écrit aussi « ce qui est rentré en x » − « ce qui est sorti en $x + \mathrm{d}x$ » d'où

$$\mathrm{d}^2N = \mathrm{d}N_e - \mathrm{d}N_s \qquad (1)$$

avec des notations explicites. On exprime $\mathrm{d}N_e$ et $\mathrm{d}N_s$ en écrivant la définition du vecteur densité de courant de particules

$$\mathrm{d}N_e = j(x,t)\,S\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}N_s = j(x+\mathrm{d}x,t)\,S\,\mathrm{d}t$$

si bien que

$$\mathrm{d}^2N = -\frac{\partial j}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,S\,\mathrm{d}t$$

Les deux écritures de d^2N conduisent ainsi à l'équation de conservation

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0$$

En utilisant finalement la loi de Fick (à 1D ici)

$$j(x) = -D\,\frac{\partial n}{\partial x}$$

on obtient l'équation de diffusion

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}}$$

2) On tient maintenant compte d'un mécanisme d'absorption des neutrons. L'énoncé précise que chaque neutron a une probabilité $\mathrm{d}t\,/\,\tau$ d'être absorbé pendant $\mathrm{d}t$. Sur les $\mathrm{d}N(t)$ neutrons présents dans le système entre x et $x + \mathrm{d}x$ à l'instant t, il y en a donc une fraction $\mathrm{d}t\,/\,\tau$ qui est absorbée entre t et $t + \mathrm{d}t$. Le nombre de neutrons absorbé dans le système pendant $\mathrm{d}t$ est donc

$$\mathrm{d}N_a = \frac{\mathrm{d}t}{\tau}\,\mathrm{d}N = \frac{\mathrm{d}t}{\tau}\,n(x,t)\,S\,\mathrm{d}x$$

Il faut dès lors reprendre le bilan (1) en prenant ce terme en compte. On écrit maintenant que la variation du nombre de neutrons vaut « ce qui est entré en x » − « ce qui est sorti en $x + \mathrm{d}x$ » − « ce qui a été absorbé » d'où

$$\mathrm{d}^2N = \mathrm{d}N_e - \mathrm{d}N_s - \mathrm{d}N_a$$

soit

$$\mathrm{d}^2N = -\frac{\partial j}{\partial x}\,S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \frac{n}{\tau}\,S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

mais puisque

$$d^2N = \frac{\partial n}{\partial t}\,\mathrm{d}t\,S\,\mathrm{d}x$$

on obtient une nouvelle équation de conservation après simplification par $S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = -\frac{n}{\tau}$$

L'introduction de la loi de Fick permet d'aboutir à une équation de diffusion avec un terme d'absorption :

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - \frac{n}{\tau}}$$

Remarque. *On peut ici vérifier qualitativement qu'on ne s'est pas trompé dans les signes en imaginant une situation complètement homogène où n ne dépend pas de x. Alors*

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = -\frac{n}{\tau} < 0$$

donc n diminue au cours du temps : c'est bien ce qui est attendu pour un terme d'absorption.

3) En régime permanent, n est indépendant du temps donc l'équation de diffusion devient

$$\frac{\mathrm{d}^2 n}{\mathrm{d}x^2} - \frac{1}{D\,\tau}\,n = 0$$

C'est une équation différentielle ordinaire linéaire du premier ordre à coefficients constants et sans second membre. Sa solution est `[à montrer en calculant les racines du polynôme caractéristique]`

$$n(x,t) = A\,\exp\left(-\frac{x}{d}\right) + B\,\exp\left(+\frac{x}{d}\right) \qquad \text{avec} \qquad \boxed{d = \sqrt{D\,\tau}}$$

Reste à déterminer les deux constantes d'intégration A et B. Déjà, n ne diverge pas lorsque x tend vers l'infini (on étudie un système d'absorption de neutrons, les neutrons disparaissent donc au fur et à mesure de leur diffusion, leur nombre n'a aucune raison de tendre vers l'infini dans la barre) et donc forcément

$$B = 0$$

Ensuite, l'énoncé donne une condition aux limites en $x = 0$ portant sur la densité de flux. Il impose

$$j(x = 0) = j_0$$

Or par loi de Fick

$$j(x=0) = -D\,\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}(x=0) = \frac{D}{d}\,A$$

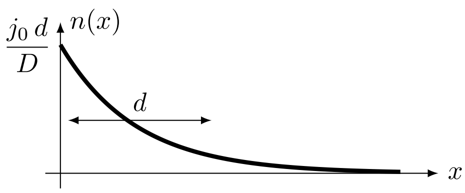
donc

$$A = \frac{j_0\,d}{D}$$

et finalement

$$\boxed{n(x) = \frac{j_0\,d}{D}\,\exp\left(-\frac{x}{d}\right)}$$

On trace



Enfin, discutons la signification physique de d. Déjà, un neutron à une probabilité $\mathrm{d}t\,/\,\tau$ d'être absorbé pendant $\mathrm{d}t$. Pendant une durée τ, il a donc une probabilité de $\tau\,/\,\tau = 1$ d'être absorbé. En conséquence, τ s'interprète comme la **durée de vie d'un neutron dans le milieu**. Ensuite, $\sqrt{D\,\tau}$ est la distance typique parcourue par diffusion en un temps τ (rappelons que la distance typique de diffusion pendant un temps t est $\ell = \sqrt{D\,t}$, ce qu'on a montré en cours par étude en ordre de grandeur de l'équation de diffusion). Finalement, d **est la distance typique parcourue par diffusion par un neutron avant d'être absorbé**.

Remarque. Des plaques de ce genre de matériau « absorbeur de neutrons » sont utilisés dans les réacteurs de centrale nucléaire pour contrôler l'intensité des réactions. Leur utilisation maladroite a conduit à l'incident bien connu de Tchernobyl. On pourra consulter `https://fr.wikipedia.org/wiki/Catastrophe_nucl%C3%A9aire_de_Tchernobyl` et `https://fr.wikipedia.org/wiki/Barre_de_contr%C3%B4le_(nucl%C3%A9aire)`.