

D1-01 Petits exercices indépendants

1] Un phénomène de diffusion est irréversible, provoqué par des inhomogénéités, au début rapide puis de plus en plus lent. Une diffusion se fait par ailleurs sans mouvement global de matière (c'est ce qui la distingue d'un phénomène de convection).

On peut citer :

- * la diffusion de particules (D1)
- * la diffusion d'énergie thermique (D2)

mais aussi

- * la diffusion des électrons dans les milieux conducteurs (D8)
- * la diffusion de quantité de mouvement en mécanique des fluides (en régime visqueux).

Rq Pour les PC, attention ! Malgré la ressemblance formelle, l'équation de Schrödinger N'EST PAS une équation de diffusion (voir TD 1).

2] Les trajectoires des particules sont aléatoires (on dit aussi stochastiques) Ce sont des déplacements de chocs en chocs. Après un choc la direction nouvelle est aléatoire. On parle de mouvement brownien. Il correspond à l'image que vous devez avoir en tête lorsqu'on parle d'agitation thermique.

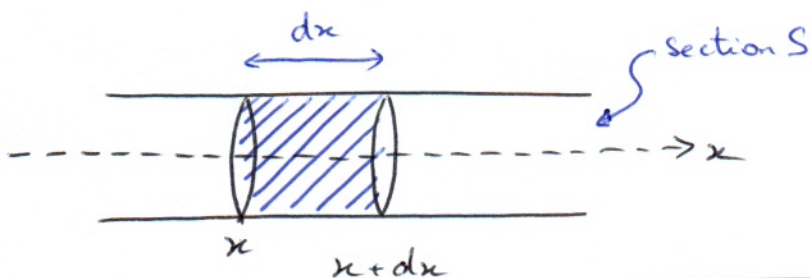
\vec{j} représente le nombre de particules ^{dN} qui traversent une surface, par unité de temps et unité de surface.

$$dN = \phi dt \text{ avec le flux } \phi = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

3] Le "-" évoque que la diffusion des particules se fait toujours des hautes concentrations vers les faibles concentrations (à l'opposé du gradient donc, qui pointe quant à lui vers les zones de fortes concentrations). La diffusion se fait toujours dans ce sens, jamais dans l'autre : cela souligne le caractère irréversible de la diffusion.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{J} \text{ est en } m^{-2} \cdot s^{-1} \\ D \text{ est en } m^2 \cdot s^{-1} \text{ (comme tous les coefficients de diffusion)} \\ \vec{\text{grad}} n \text{ est en } m^{-4} \text{ (le gradient est en } m^{-1}, n \text{ en } m^{-3}). \end{array} \right.$$

4] On suppose que le milieu 1D crée σ particules par unité de temps et de volume, par exemple par une réaction chimique.



$$m(x, t) \\ \vec{J}_N = J_N(x, t) \vec{e}_x$$

Entre t et $t+dt$, il y a donc $dN_c = \sigma S dx dt$ particules créées dans le système entre x et $x+dx$.

On fait un bilan : on calcule de deux manières différents la variation du nombre de particules diffusants dans le système bleu entre t et $t+dt$.

$$\textcircled{1} \quad d^2 N = dN(t+dt) - dN(t) = \frac{\partial n}{\partial t} S dx dt \quad \text{d'une part.}$$

$$\textcircled{2} \quad d^2 N = dN_e - dN_s + dN_c \quad (\text{"ce qui entre } \ominus \text{ ce qui sort } \oplus \text{ ce qui a été créé"})$$

$$= - \frac{\partial J}{\partial x} S dx dt + \sigma S dx dt$$

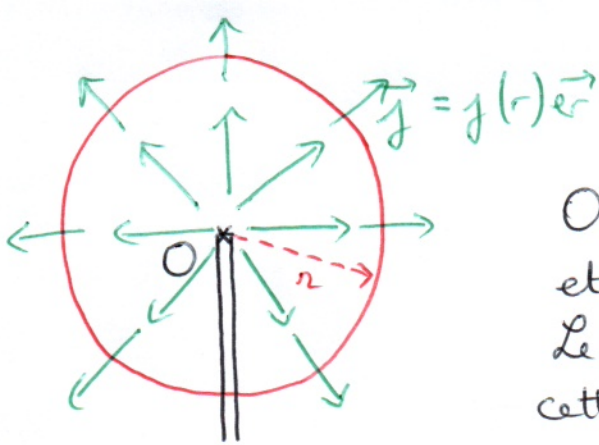
Finalement, $\textcircled{1} = \textcircled{2}$ donc

$$\frac{\partial n}{\partial t} = - \frac{\partial J}{\partial x} + \sigma$$

Équation de conservation 1D avec le terme de création

2

5



On considère la sphère de centre O et de rayon r .

Le nombre de particules qui traversent cette sphère entre t et $t+dt$ est

$$dN = \phi dt = \left(\iint \vec{j} \cdot d\vec{S} \right) dt$$

$$= j(r) 4\pi r^2 dt.$$

En régime stationnaire maintenant, ce nombre de particules est identiques à celui qui traversent la sphère de rayon r' quelconque, entre t et $t+dt$ (car sinon il y aurait un changement du nombre de particules entre r et r' : il faut qu'il y ait autant de particules qui rentrent par la sphère de rayon r , qu'il y ait qui sortent par celle de rayon r'). Ainsi, la stationnarité impose

$$j(r) 4\pi r^2 dt = j(r') 4\pi r'^2 dt$$

qu'on peut aussi écrire

$$j(r) 4\pi r^2 = \phi dt \equiv \phi \quad (\text{c'est un flux, celui qui sort de la cheminée})$$

d'où

$$j(r) = \frac{\phi}{4\pi r^2}$$

6] L'équation de conservation $\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$ à 3D donne en régime stationnaire

$$\text{div} \vec{j} = 0 \text{ soit } \frac{\partial(r^2 j)}{\partial r} = 0 \text{ d'après la formule}$$

et donc

$$j(r) = \frac{A}{r^2}$$

(la constante A vaut d'après la question précédente

$$A = \frac{\phi}{4\pi}).$$

③

Γ] $M \sim$ qq grammes par mole (29 pour l'air,
28 pour le diazote N_2 ,
4 ———— hélium He)

Un coefficient de diffusion étant en $m^2 \cdot s^{-1}$, on le construit comme le produit d'une longueur microscopique (le libre parcours moyen l_{pm}) et d'une vitesse microscopique (la vitesse v_{th} d'agitation thermique)

On rappelle $v_{th} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$ (voir les chapitres de 1^{ère} année de thermo).

alors

$$D \sim l_{pm} v_{th}$$

On a dans les CNTP $\left\{ \begin{array}{l} v_{th} \sim 300 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ l_{pm} \sim 10^{-7} \text{ m} \end{array} \right.$ pour un gaz.

d'où

$$D \sim 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

C'est l'ordre de grandeur des valeurs tabulées pour les gaz.

La pression peut intervenir dans le l_{pm} ($l_{pm} \downarrow$ qd $P \uparrow$, intuitivement).