TD - Euler

Méthodes de différences finies

On s'intéresse dans ce TD numérique à l'analyse énergétique de différents schémas de résolution d'équation différentielle par différences finies : Euler explicite, Euler implicite et Crank-Nicholson. C'est l'occasion de revenir sur la ***stabilité*** *de ces méthodes de résolution.*

Dans tous les exercices, on cherche à résoudre l'équation d'un oscillateur harmonique simple

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

C'est une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 2, à coefficients constants et sans second membre. Les solutions sont évidemment connues analytiquement : ce sont

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

CN — 05 Analyse énergétique du schéma d'Euler explicite

On souhaite utiliser pour commencer un schéma d'Euler **explicite** pour résoudre cette équation. Pour cela, on transforme cette équation d'ordre 2 en deux équations d'ordre 1 en introduisant une seconde variable $y = \dot{x}$. (Que représente alors y ?). Ce genre d'astuce est très répandu, voir cours IN4. On a alors bien sûr

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\omega^2 x \end{cases}$$

Le schéma d'Euler explicite consiste à approximer les membres de gauche par une différence finie d'ordre 1 entre les instants t_n et t_{n+1}, et à évaluer les membres de droite à t_n.

1) `[Numérique]` Implémenter ce schéma d'Euler explicite et tracer $x(t)$.

On rappelle des instructions utiles pour tracer des graphiques sous `python` :

```
>>> from matplotlib import pyplot as plt
>>> plt.plot(t, x)                          # si t et x sont des listes de même taille
>>> plt.show()
```

2) `[Numérique]` Tracer également le **portrait de phase** de l'oscillateur, c'est à dire y en fonction de x. Qu'observe-t-on ? Et que devrait-on observer physiquement ?

3) L'observation indique que le schéma d'Euler explicite est instable, c'est-à-dire qu'il ne converge pas vers la solution physique à temps longs. On peut l'expliquer en adoptant un raisonnement énergétique. Que vaut l'énergie d'un oscillateur harmonique ? On introduira m la masse de la particule. Comment cette énergie évolue-t-elle dans le temps ?

4) Quel est maintenant le lien entre E_n et E_{n+1}, les énergies calculées aux temps t_n et t_{n+1} lors de la résolution numérique ? Conclure en traçant E en fonction de t.

CN — 06 Analyse énergétique du schéma d'Euler implicite

On utilise désormais un schéma d'Euler **implicite** pour résoudre cette équation. On repart des mêmes équations et on approxime toujours les membres de gauche par une différence finie d'ordre 1 entre les instants t_n et t_{n+1}. Par contre, on évalue cette fois les membres de droite à t_{n+1}.

1) `[Numérique]` Obtenir les nouvelles relations de récurrences puis implémenter ce schéma d'Euler implicite et tracer $x(t)$.

2) `[Numérique]` Tracer également le **portrait de phase** de l'oscillateur, c'est à dire y en fonction de x. Qu'observe-t-on pour ce nouveau schéma ?

3) L'observation indique que le schéma d'Euler implicite ne diverge pas. Cela s'explique en montrant que l'énergie décroît dans le temps. Pour cela, calculer la relation de réccurence entre E_n et E_{n+1}, les énergies calculées aux temps t_n et t_{n+1} lors de la résolution numérique. Conclure en traçant E en fonction de t.

Pas de chance, l'algorithme implicite n'est pas vraiment meilleur que l'explicite ici (enfin il ne diverge pas, c'est déjà un bon point, mais il ne suit toujours pas la solution exacte à temps long). On propose un dernier schéma, plus sophistiqué, pour lequel $E_n = \text{Cste}$ numériquement.

CN — 07 Analyse énergétique du schéma de Crank-Nicholson

On utilise désormais un schéma de Crank-Nicholson. Il s'agit en fait de faire pour les termes de droite la moyenne de leurs valeurs au temps t_n et t_{n+1}. (C'est donc aussi une méthode implicite).

1) `[Numérique]` Implémenter ce schéma de Crank-Nicholson et tracer $x(t)$.

2) `[Numérique]` Tracer également le **portrait de phase** de l'oscillateur, c'est à dire y en fonction de x. Qu'observe-t-on ?

3) Calculer la relation de réccurence entre E_n et E_{n+1}, les énergies calculées aux temps t_n et t_{n+1} lors de la résolution numérique. Conclure en traçant E en fonction de t.