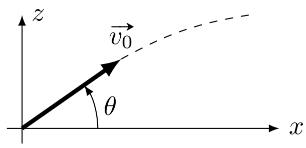
TD - CN

Révisions capacités numériques

CN — 01 Chute libre avec frottement

Résolution d'une équation différentielle par méthode d'Euler.



On lance un boulet de masse m depuis l'origine d'un repère cartésien, à une vitesse $\vec{v_0}$ faisant un angle θ avec l'horizontale.

1) Estimer le nombre de Reynolds de l'écoulement autour du boulet. Quelle loi de frottement est alors la plus appropriée ?

2) On adopte la loi de frottement

$$\vec{F} = -\frac{1}{2}\, C\, S\, \varrho\, ||\vec{v}||\, \vec{v}$$

où C est le coefficient de trainée du boulet, S sa surface et ϱ la masse volumique de l'air. Écrire le théorème du centre de masse appliqué au boulet, et le projeter sur les axes x et z.

On donne les valeurs numériques : $m = 20$ kg, $v_0 = 221\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $r = 9$ cm le rayon du boulet sphérique, $\theta = 36°$, $\varrho = 1{,}3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ et $C = 0{,}52$ le coefficient de trainée du boulet.

3) `[Numérique]` Écrire le schéma d'Euler explicite pour résoudre ces deux équations.

4) `[Numérique]` Intégrer les deux vitesses v_x et v_z à l'aide de la méthode des rectangles pour obtenir les équations horaires de la trajectoire $x(t)$ et $z(t)$.

5) `[Numérique]` Trouver le temps τ auquel le boulet touche le sol. En déduire la portée $x_{\max}$ du boulet.

6) `[Numérique]` Adapter les implémentations précédentes pour créer un programme qui obtient la portée $x_{\max}(\theta)$ en fonction de l'angle θ initial. Tracer alors $x_{\max}(\theta)$.

CN — 02 Modes propres d'une poutre vibrante

Résolution d'une équation algébrique par méthode dichotomique.

Contrairement à la corde du chapitre O2 supposée sans raideur, une poutre peut résister à des efforts de flexions. On admet alors que les ondes de vibrations sur une telle poutre vérifie l'équation d'onde

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\mu\, S}{E\, I}\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

avec μ la masse volumique de la poutre, S sa section transversale, E le module d'Young et I le moment quadrature. On note L la longueur de la poutre.

1) On cherche les modes propres de la poutre. Pour cela, on commence par chercher une solution stationnaire $y(x,t) = f(x)\, cos(\omega\, t)$. Quelle équation vérifie alors f ?

2) Résoudre cette équation. *On pourra utiliser la méthode du polynôme caractéristique.*

3) `[Numérique]` Pour déterminer les constantes d'intégration précédentes, il faut préciser les conditions aux limites. Pour une poutre encastrée en $x = 0$ et libre en $x = L$, ces conditions sont

$$y(x=0,t) = 0, \qquad \frac{\partial y}{\partial x}(x=0,t) = 0, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x=L,t) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(x=L,t) = 0$$

En les utilisant, on montre alors que les pulsations propres de la poutre vérifient

$$\omega_n = \beta_n^2 \sqrt{\frac{E\, I}{\mu\, S\, L^2}} \qquad \text{où les coefficients } \beta_n \text{ sont les solutions de} \qquad \cos(\beta)\, \cosh(\beta) + 1 = 0 \tag{1}$$

Déterminer les 5 premiers coefficients $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ et β_5 en résolvant l'équation (1) par dichotomie. On commencera par tracer la fonction afin de localiser grossièrement les racines.

Réponse : $\beta_1 = 1{,}8751$; $\beta_2 = 4{,}6941$; $\beta_3 = 7{,}8547$; $\beta_4 = 10{,}995$; $\beta_5 = 14{,}137$.

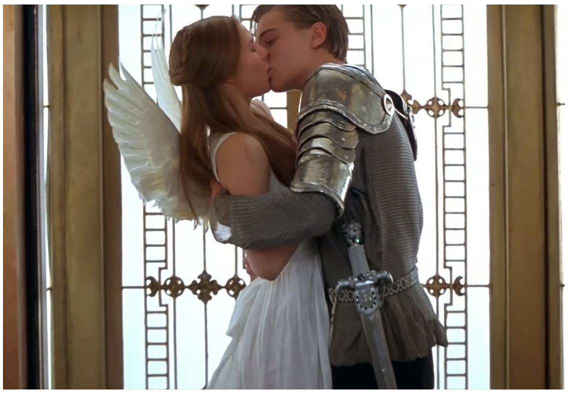
TD - CN

About love and rabbits

Vous saviez résoudre un système d'équations différentielles ordinaires linéaires à coefficients constants de manière explicite (c'est-à-dire analytique). Grâce à la méthode d'Euler, vous savez désormais résoudre numériquement des systèmes d'équations différentielles ordinaires plus complexes, et notamment non-linéaires : une diversité incommensurable de nouveaux problèmes s'offrent à vous !

On s'intéresse ici à deux situations décrites par ce type d'équations.

CN — 03 Roméo et Juliette



On s'intéresse à la dynamique de la relation amoureuse d'un couple formé par un Roméo et une Juliette. On note $R(t)$ l'amour de Roméo pour Juliette et $J(t)$ l'amour de Juliette pour Roméo.

On suppose que ces amours évoluent suivant les équations différentielles suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} & = & -\alpha\,R+\beta\,J\,(J_m-J)\\ \dfrac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} & = & \gamma\,J+\delta\,R\end{array}\right.$$

avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et J_m des paramètres réels positifs.

1) Commenter la dynamique induite par chacun des termes de ces équations. Existe-t-il un état stationnaire pour leurs amours respectifs ?

2) Écrire un programme qui résout ces équations en fonction des 5 paramètres du problème.

3) Tracer sur un même graphique R et J en fonction du temps, pour des valeurs de paramètres qui vous conviennent. Quels types de solutions observez-vous, en fonction des paramètres ?

4) Plutôt que de chercher l'évolution temporelle de R et J, on peut chercher à tracer l'un en fonction de l'autre : on parle dans ce cas de **portrait de phase**. Le tracer. Vous prendrez pour cela des valeurs de paramètres qui vous conviennent.

5) Roméo et Juliette sont-ils heureux en couple ? Essayez de répondre quantitativement.

Proposition de paramètres. L'exercice vous invite à observer l'effet des paramètres sur la dynamique. On pourra commencer l'observation par les paramètres $\alpha = 0{,}1$, $\beta = 0{,}02$, $\gamma = 0{,}1$, $\delta = 1$, $J_m = 100$, et on pourra prendre comme conditions initiales $R_0 = 0{,}5$ et $J_0 = 0{,}5$.

CN — 04 Lapins et renards

On s'intéresse à la dynamique d'une population de lapins L et de renards R, et on admet qu'elles vérifient les célèbres équations « proies-prédateurs » de Lotka-Volterra.

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} & = & L\,(\alpha-\beta\,R)\\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} & = & R\,(\gamma\,L-\delta)\end{array}\right.$$

avec α, β, γ et δ des paramètres réels positifs.

1) Expliquer chacun des termes de ces équations.

2) Écrire un programme qui résout ces équations en fonction des 4 paramètres du problème. Tracer le portrait de phase de cette dynamique et interpréter.

Proposition de paramètres. On pourra commencer l'observation par les paramètres $\alpha = 0{,}1$, $\beta = 0{,}02$, $\gamma = 0{,}1$, $\delta = 1$, et on pourra prendre comme conditions initiales $R_0 = 1$ et $L_0 = 5$.