IN3-Cours

Calcul d'une intégrale sur un segment

On apprend dans ce cours à calculer numériquement l'intégrale d'une fonction f à valeurs réelles sur un segment $[a,b]$:

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Table des matières

1 Exemple

Peu d'intégrales sont calculables « à la main » : il faut pour cela connaître une primitive de la fonction étudiée, ce qui est rare en pratique. On est pour cette raison souvent confrontés à une intégrale dont on aimerait connaître la valeur sans savoir l'exprimer analytiquement.

Par exemple, la période d'oscillation T d'un pendule simple de longueur ℓ, laché sans vitesse initiale depuis un angle θ_0, est donnée par

$$T = 2\sqrt{\frac{2\,\ell}{g}}\int_0^{\theta_0}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

qui ne se calcule pas analytiquement...

Remarque. *Par contre vous savez bien sûr résoudre cette intégrale de manière approchée dans le cas où θ_0 est petit : la période est*

$$T \approx 2\,\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \qquad \text{ce qui suggère que} \qquad \int_0^{\theta_0}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}} \approx \frac{\pi}{\sqrt{2}} \qquad \text{pour} \qquad \theta_0 \ll 1.$$

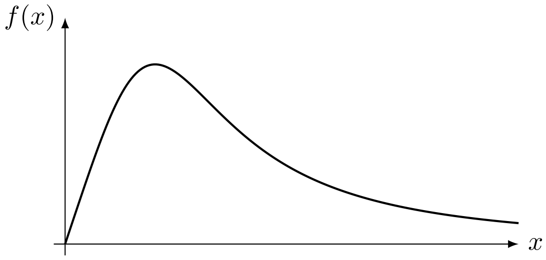
2 Méthode des rectangles

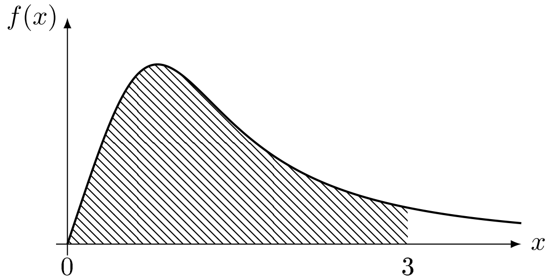
2.1 Présentation

Les méthodes numériques de calcul d'intégrales se conçoivent par des arguments graphiques. Une intégrale représente mathématiquement l'aire sous une courbe. Prenons l'exemple de la fonction

$$f(x) = \frac{x}{1+x^3}$$

Elle a pour représentation graphique la courbe de gauche.





L'intégrale

$$I = \int_0^3 \frac{x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$$

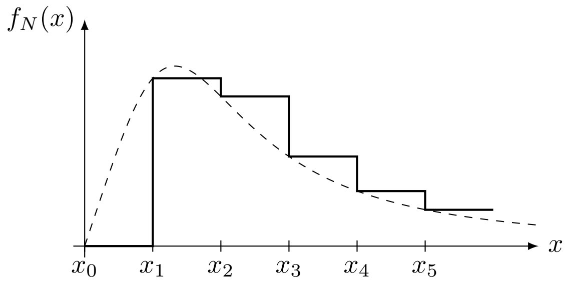
est donc l'aire sous la courbe de droite. Cette aire peut être estimée approximativement comme suit. On commence par découper l'intervalle $[a,b]$ (ici $[0,3]$) en un nombre donné N de parts égales. Cela définit un ensemble d'abscisses

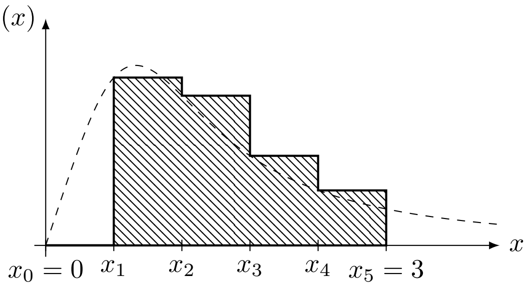
$$x_i = a + \frac{b-a}{N}\,i \qquad \text{pour } i \text{ allant de 0 à N-1,}$$

puis on définit la fonction « en escalier », continue par morceaux,

$$f_N(x) = f(x_i) \qquad \text{si} \qquad x_i < x < x_{i+1}$$

Cette fonction a pour représentation graphique la courbe de gauche ci-dessous





Et l'aire sous la courbe de droite approche l'intégrale précédente I de mieux en mieux à mesure que N augmente.

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^3 f_N(x)\,\mathrm{d}x = I \qquad \left(= \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^3 \frac{x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x\right)$$

L'aire sous f_N se calcule très facilement puisqu'elle vaut par relation de Chasles la somme des aires des rectangles

$$\int_0^3 f_N(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_N(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)\,h = h \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)$$

Remarque. C'est en fait une **somme de Riemann**. Si on note h le pas du jeu d'abscisse x_i, c'est-à-dire $h = (b-a)\,/\,N$, alors on est en train d'écrire que

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)\,h}$$

ou $f(x_i)\,h$ est l'aire du petit rectangle entre les abscisses x_i et x_{i+1}, de largeur h et de hauteur $f(x_i)$. Plus particulièrement sur notre exemple,

$$\int_0^3 \frac{x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{x_i}{1+x_i^3}\,h$$

2.2 Implémentation

En python, on implémente ce calcul approché d'intégrales avec le programme suivant par exemple.

Calcul approché d'une intégrale sur un segment par méthode des rectangles.

Les arguments sont la fonction f à intégrer, les extrémités du segment a et b sur lequel on souhaite intégrer, et le nombre N de pas qu'on souhaite utiliser. Plus N est grand meilleure est l'approximation.

```
def calc_int(f, a, b, N) :
    h = (b - a) / N
    res = 0
    for i in range(N) :
        res += f(a + i * h) * h
    return res
```

Et la fonction s'appelle par exemple comme suit

```
>>> f = lambda x : x / (1+x**3)
>>> calc_int(f, 0, 3, 100)
0.8772017752607153
>>> calc_int(f, 0, 3, 500)
0.8785643568141956
```

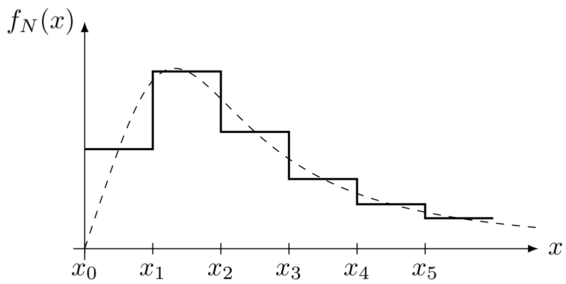
pour une valeur attendue environ égale à 0,8788889881916203.

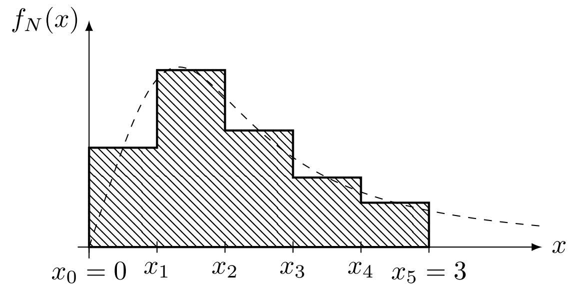
2.3 Variation de la méthode des rectangles

Plutôt que de considérer les rectangles de hauteur $f(x_i)$, on peut considérer ceux de hauteur $f(x_i + h/2)$, c'est-à-dire ceux qui prennent comme hauteur la valeur de f au milieu de l'intervalle entre x_i et x_{i+1}. On parle de **méthode des rectangles centrés**. On définit pour celle-ci la fonction en escalier

$$f_N(x) = f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \qquad \text{si} \qquad x_i < x < x_{i+1}$$

Graphiquement, cela donne





La formule de Riemann « centrée » est

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) h$$

Et une implémentation de cette méthode des rectangles centrés peut être

```
def calc_int_cent(f, a, b, N) :
    h = (b-a) / N
    res = 0
    for i in range(N) :
        res += f(a + (i + 0.5) * h) * h
    return res
```

Ce programme retourne les valeurs suivantes

```
>>> f = lambda x : x / (1+x**3)
>>> calc_int_cent(f, 0, 3, 100)
0.8789290231987644
>>> calc_int_cent(f, 0, 3, 500)
0.8788905895945711
```

En pratique, la méthode des rectangles centrés n'est pas plus efficace que celle des rectangles « normaux »... Notamment la convergence vers le résultat n'est pas particulièrement plus rapide.

Si on souhaite une méthode plus rapide, c'est-à-dire une méthode qui donne un meilleur résultat pour N petit, on peut utiliser la méthode des trapèzes.

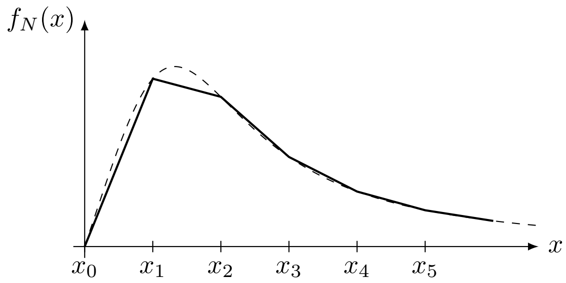
3 Méthode des trapèzes

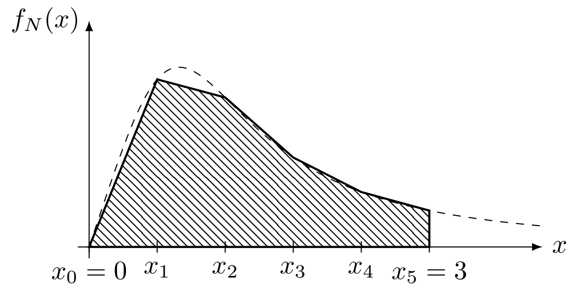
3.1 Présentation

Au lieu de considérer une fonction f_N en escalier, on peut la définir linéaire par morceaux.

$$f_N(x) = f(x_i) + (x - x_i)\,\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} \qquad \text{si} \qquad x_i < x < x_{i+1}.$$

Graphiquement, cela donne





Et mathématiquement on a bien sûr la convergence

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^3 f_N(x)\,\mathrm{d}x = I = \int_0^3 \frac{x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$$

et les aires sous f_N se déterminent par

$$\int_0^3 f_N(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}\,h$$

puisque l'aire sous le trapèze entre x_i et x_{i+1} est « hauteur moyenne × base » soit

$$\mathrm{aire}(x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}\,h$$

3.2 Implémentation

Calcul approché d'une intégrale sur un segment par méthode des trapèzes.

Les arguments sont la fonction f à intégrer, les extrémités du segment a et b sur lequel on souhaite intégrer, et le nombre N de pas qu'on souhaite utiliser. Plus N est grand meilleur est l'approximation.

```
def calc_int_trap(f, a, b, N) :
    h = (b - a) / N
    res = 0
    for i in range(N) :
        res += ( f(a + i * h) + f(a + (i+1) * h) ) / 2 * h
    return res
```

Et la fonction s'appelle par exemple comme cela

```
>>> f = lambda x : x / (1+x**3)
>>> calc_int_trap(f, 0, 3, 100)
0.8788089181178579
```

En 100 itérations, la méthode des trapèzes donne un meilleur résultat que celle des rectangles avec 500 itérations.

4 Comparaison des deux méthodes

On retiendra que la méthode des trapèzes est meilleure que celle des rectangles dans le sens où elle nécessite moins d'itérations pour être précise. *La **méthode de Simpson**, qui approxime la courbe par des bouts de paraboles (interpolation de Lagrange par un polynôme d'ordre 2) est encore meilleure...*

Exercice 1. Le logarithme népérien peut être défini comme

$$\ln x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Écrire en Python un programme qui renvoie les valeurs du logarithme népérien pour la liste d'arguments suivante : 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500 et 1000.

Exercice 2. Écrire un programme qui renvoie la période d'un pendule simple de longueur $\ell = 25$ cm laché sans vitesse initiale en fonction de l'angle initial θ_0 donné comme argument.