

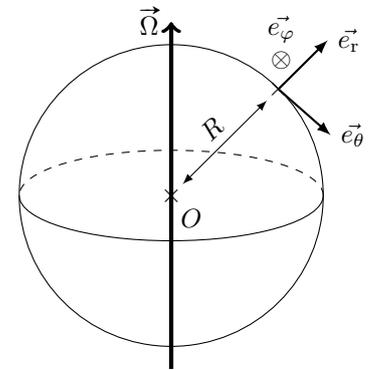
CN 6

Étude numérique de la « déviation vers l'Est »

L'objectif de ce TD sous python est d'étudier le phénomène de déviation vers l'Est observé lors du chute libre.

Pour cela, on considère une masse m , supposée ponctuelle, dans le référentiel terrestre. Le référentiel géocentrique est supposé galiléen. On note R le rayon de la Terre supposée sphérique.

- 1) Quel est le mouvement du référentiel terrestre par rapport au référentiel géocentrique? Le référentiel terrestre est-il galiléen? Écrire les forces d'inertie subies par un corps dans le référentiel terrestre.
- 2) Que peut-on dire de la force d'inertie d'entraînement?
- 3) Évaluer en ordre de grandeur la force d'inertie de Coriolis lors d'une chute libre, et la comparer au poids. Pourrait-on prévoir qualitativement ce résultat? Quelle est la direction de cette force? Commenter. La direction de la force dépend-elle de l'hémisphère dans lequel on se trouve?
- 4) On se place à une latitude $\lambda = 47^\circ$ (correspondant à la France et à l'Allemagne). Rappeler ce qu'est la latitude.
- 5) On note z l'axe donnant localement la verticale ascendante. $z = 0$ est la surface du sol. On note aussi \vec{e}_x le vecteur pointant vers le Sud et \vec{e}_y celui pointant vers l'Est. On donne aussi le système de repérage sphérique centré sur la Terre sur la figure ci-contre. Donner la correspondance locale entre les vecteurs de la base cartésienne et ceux de la base sphérique.
- 6) Écrire le principe fondamental de la dynamique et le projeter sur les trois axes x , y et z . On prendra les notations v_x , v_y et v_z pour les vitesses. (On fera l'hypothèse que \vec{g} pointe vers le centre de la Terre, ce qui revient à négliger la force d'inertie d'entraînement).



Remarque historique. Une étude expérimentale de cette déviation vers l'Est a été mise en œuvre en 1833 par le physicien allemand Ferdinand Reich. Il a jeté un caillou dans un puit de $h = 158$ m de profondeur et a mesuré une déviation de 28 mm vers l'Est par rapport au point d'impact prévu en l'absence de force de Coriolis.

- 7) On lâche la masse sans vitesse initiale à partir d'une altitude $z = h$. Sous l'hypothèse où on néglige la force de Coriolis, quelle durée τ prend la chute libre dans cette expérience? En faire l'application numérique.

On considère de nouveau la force de Coriolis. On revient donc aux équations de la question 6). Ce sont des équations différentielles ordinaires linéaires couplées, leur résolution analytique est donc faisable mais pas facile. C'est pourquoi on propose plutôt une approche numérique, selon un schéma d'Euler explicite.

On prendra $h = 158$ m. On supposera que la force d'inertie de Coriolis reste faible donc ne change quasiment pas le temps de chute libre τ . On discrétisera donc le temps entre $t = 0$ et $t = \tau$ en N points.

- 8) Quel est alors le pas de temps Δt entre deux points?
- 9) [Numérique] Implémenter un schéma d'Euler explicite résolvant les équations.
- 10) [Numérique] Ayant déterminé les vitesses par le schéma d'Euler, déduire les positions x , y et z en fonction du temps. On réalisera l'intégration par la méthode des rectangles (essayez d'être malin sur le calcul...) et on tracera ensuite la trajectoire dans le plan (y, z) (pour observer la déviation vers l'Est), mais également dans le plan (x, z) (déviation vers le Sud), puis aussi dans le plan (x, y) (chute libre vue d'au-dessus).
- 11) Retrouve-t-on les 28 mm d'écart mesurés jadis par Reich? Et quel est l'écart de la déviation vers le Sud?
- 12) Rédiger un petit bilan de 2 lignes sur le phénomène de déviation vers l'Est lors d'une chute libre.

Correction

Les équations à résoudre sont

$$\begin{cases} \dot{v}_x = 2\Omega \sin \lambda v_y \\ \dot{v}_y = -2\Omega \sin \lambda v_x - 2\Omega \cos \lambda v_z \\ \dot{v}_z = -g + 2\Omega \cos \lambda v_y \end{cases} \quad (1)$$

qu'on peut écrire si on le souhaite sous forme matricielle pour mettre en valeur la linéarité de ces équations :

$$\dot{X} = AX + G \quad \text{avec} \quad X = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2\Omega \sin \lambda & 0 \\ -2\Omega \sin \lambda & 0 & -2\Omega \cos \lambda \\ 0 & 2\Omega \cos \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

Revenons à l'écriture (1). Pour résoudre ce système, on approxime les dérivées à l'ordre 1. En notant $t_k = k \Delta t$ les temps discrets et $v^k = v(t_k)$ les vitesses en ces points, on écrit

$$v_x \approx \frac{v_x^{k+1} - v_x^k}{\Delta t}, \quad v_y \approx \frac{v_y^{k+1} - v_y^k}{\Delta t} \quad \text{et} \quad v_z \approx \frac{v_z^{k+1} - v_z^k}{\Delta t}$$

Le schéma d'Euler explicite conduit alors aux récurrences

$$\begin{cases} v_x^{k+1} = v_x^k + 2\Omega \sin \lambda v_y^k \Delta t \\ v_y^{k+1} = v_y^k - 2\Omega \sin \lambda v_x^k \Delta t - 2\Omega \cos \lambda v_z^k \Delta t \\ v_z^{k+1} = v_z^k - g \Delta t + 2\Omega \cos \lambda v_y^k \Delta t \end{cases} \quad (2)$$

Ensuite, pour obtenir les positions, on intègre la vitesse. Sachant que $v_x(t) = dx/dt$, on a en intégrant

$$\int_t^{t+\Delta t} v_x(t) dt = [x(t)]_t^{t+\Delta t} = x(t+\Delta t) - x(t) \quad \text{soit} \quad x(t+\Delta t) = x(t) + \int_t^{t+\Delta t} v_x(t) dt$$

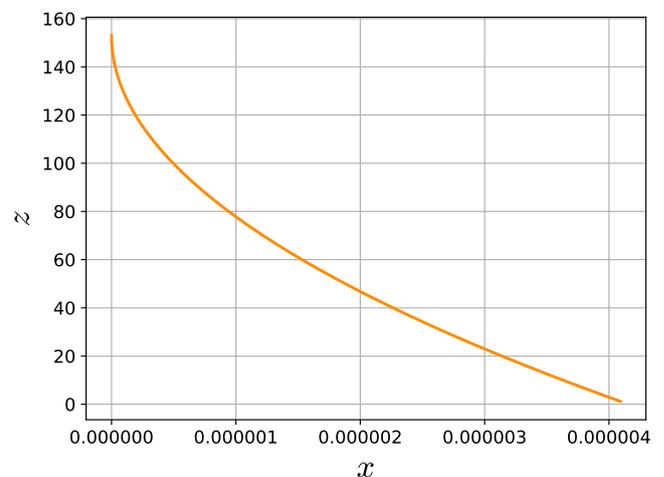
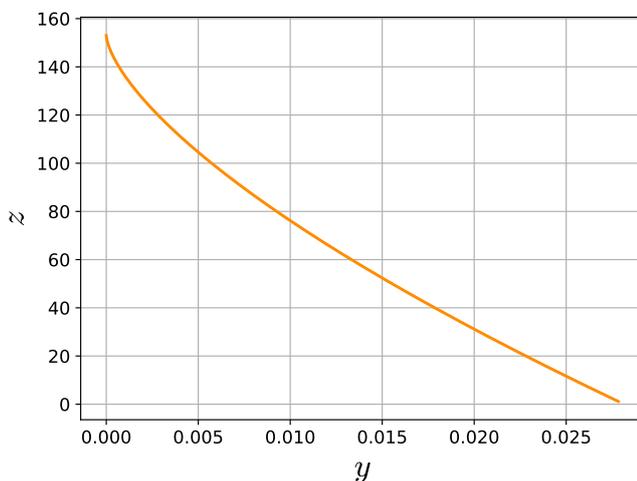
puis en approximant l'intégrale par l'aire du rectangle (car Δt est le pas de temps, il est tout petit !)

$$x(t+\Delta t) \approx x(t) + v_x(t) \Delta t$$

donc, en notant $x^k = x(t_k)$, puis en généralisant pour y et z ,

$$\begin{cases} x^{k+1} = x^k + v_x^k \Delta t \\ y^{k+1} = y^k + v_y^k \Delta t \\ z^{k+1} = z^k + v_z^k \Delta t \end{cases} \quad (3)$$

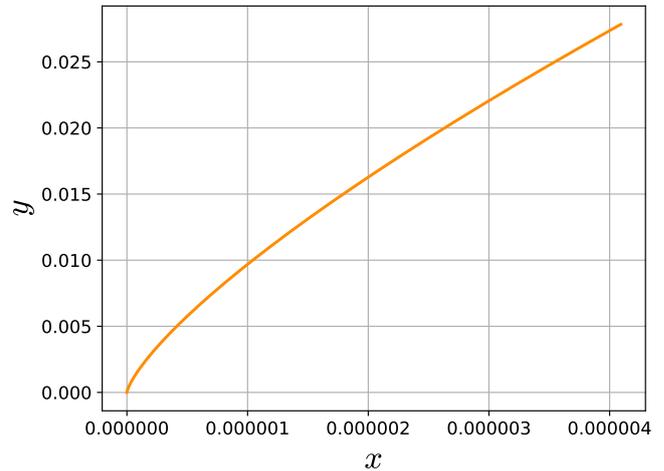
On donne en fin de document une implémentation possible de ces algorithmes. Les courbes demandées sont (avec des échelles différentes pour chacun des axes évidemment)



et dans le plan (xy) , voir courbe ci-contre. On retrouve effectivement les 28 mm de déviation mesurés par Reich. La déviation vers le Sud est quant à elle de 4 microns environ. C'est complètement négligeable (facteur 10^4) devant la déviation vers l'Est. *En fait, cela invite à poser $v_z \gg v_y \gg v_x$ et à faire des approximations successives dans les équations de départ. La résolution des équations approchées devient facile et on calcule alors une déviation vers l'Est [à faire en exercice, voir plus bas]*

$$\Delta y = \frac{g \Omega t^3 \cos \lambda}{3} = \frac{\Omega (2h)^{3/2} \cos \lambda}{3 \sqrt{g}}$$

dont l'application numérique donne les 28 mm attendus.



On donne le programme ayant permis d'obtenir ces courbes :

```
# On charge les bibliotheques
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt

# On definit les grandeurs utiles
h = 153.
g = 9.81
tau = np.sqrt(2*h/g)          # la duree de la chute libre
print(tau)

N = 400                       # le nombre de points
Dt = tau / N                  # le pas de temps

# On definit des grandeurs qui simplifient les notations
Omega = 2 * np.pi / (24 * 3600)
Osinl = 2 * Omega * np.sin(47 * np.pi / 180)
Ocosl = 2 * Omega * np.cos(47 * np.pi / 180)

# On integre les equations differentielles
vx, vy, vz = [0], [0], [0]   # les conditions initiales

for i in range(1, N) :       # Equations (2) des calculs
    ux, uy, uz = vx[-1], vy[-1], vz[-1]
    vx.append( ux + Osinl * uy * Dt )
    vy.append( uy - Osinl * ux * Dt - Ocosl * uz * Dt )
    vz.append( uz - g * Dt + Ocosl * uy * Dt )

# Et on integre les vitesses pour avoir les positions
x, y, z = [0], [0], [h]
for i in range(1, N) :       # Equations (3) des calculs
    x.append( x[-1] + Dt * vx[i-1] )
    y.append( y[-1] + Dt * vy[i-1] )
    z.append( z[-1] + Dt * vz[i-1] )

# On trace les resultats
plt.grid()
plt.xlabel(r"$x$", fontsize=22)
plt.ylabel(r"$y$", fontsize=22)
plt.plot(x, y, color='darkorange', linewidth=2)
plt.xticks(fontsize=12)
plt.yticks(fontsize=12)
plt.tight_layout()
plt.show()
```

Bonus. Étude analytique approchée. On peut profiter du temps qu'il nous reste pour écrire le calcul approché. En suivant le commentaire du paragraphe précédent, on suppose $v_y \ll v_z$ et $v_x \ll v_y$, de sorte que les équations (1) se simplifient en

$$\begin{cases} \dot{v}_x \approx 2\Omega \sin \lambda v_y \\ \dot{v}_y \approx -2\Omega \cos \lambda v_z \\ \dot{v}_z \approx -g \end{cases}$$

On résout alors $v_z(t) = -gt$ (avec la condition initiale $v_z(0) = 0$), puis en réinjectant dans l'équation de v_y on obtient

$$\frac{dv_y}{dt} = 2g\Omega \cos \lambda t \quad \text{soit} \quad v_y(t) = g\Omega \cos \lambda t^2$$

en intégrant, avec la condition initiale $v_y(0) = 0$. En intégrant encore une fois, on a

$$y(t) = \frac{g\Omega \cos \lambda t^3}{3}$$

Et puisque le temps de chute est $\tau \approx \sqrt{2h/g}$ (il suffit d'intégrer $v_z(t)$ pour avoir $z(t)$ puis trouver le temps τ auquel $z = 0$), on trouve une **déviaton vers l'Est**

$$y(\tau) = \frac{\Omega (2h)^{3/2} \cos \lambda}{3\sqrt{g}}$$

dont l'application numérique donne $y(\tau) = 29$ mm, proches des 28 mm attendus. Poursuivons : connaissant $v_y(t)$, on peut déterminer $v_x(t)$. On utilise pour cela la première équation :

$$\frac{dv_x}{dt} = 2\Omega \sin \lambda v_y = 2g\Omega^2 \cos \lambda \sin \lambda t^2 \quad \text{soit} \quad v_x(t) = 2g\Omega^2 \cos \lambda \sin \lambda \frac{t^3}{3}$$

car $v_x(0) = 0$. La **déviaton vers le Sud** s'obtient en intégrant encore une fois

$$x(t) = g\Omega^2 \cos \lambda \sin \lambda \frac{t^4}{6}$$

car $x(0) = 0$, puis en calculant $x(\tau)$ la position à la fin de la chute :

$$x(\tau) = 2 \frac{\Omega^2 \cos \lambda \sin \lambda h^2}{3g}$$

L'application numérique conduit à $x(\tau) = 4 \mu\text{m}$, qui correspond bien au résultat obtenu par la résolution numérique des équations différentielles (voir courbes).