CN 5

Résolution numérique de l'équation de diffusion

Dans ce TD numérique, on résout l'équation de la diffusion thermique à une dimension $$\frac{\partial T}{\partial t} = D_{\text{th}} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad (1)$$

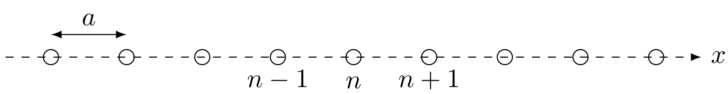
On réalise cela à l'aide d'une méthode de différence finie (on prendra un schéma d'Euler explicite, voir ci-dessous).

CN5 — 01 Rappels sur la méthode d'Euler

On commence par discrétiser l'espace et le temps :

- l'espace est un réseau unidimensionnel de pas a ;
- le temps évolue par pas de τ.

Une position est alors donnée par un indice n tel que $x = n\,a$, et de la même manière un temps est donné par une indice k tel que $t = k\,\tau$. L'espace contient `N` sites. Le champ de température $T(x,t)$ est alors représenté comme un champ discrétisé T`[n, k]`.



1) Donner le développement limité de $T(x, t+\tau)$ à l'ordre un en τ. On fera apparaître les grands $\mathcal{O}$ appropriés. En déduire une approximation de la dérivée
$$\frac{\partial T}{\partial t}$$
Quel est l'ordre en τ de l'erreur commise dans cette approximation ?

2) Traduire cette dérivée temporelle pour le champ de température discrétisé T`[n, k]`.

3) Donner les développements limités de $T(x+a,t)$ et $T(x-a,t)$ à l'ordre 2 en a. En déduire une expression de la dérivée seconde
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$
Quel est l'ordre en a de l'erreur commise dans cette approximation ?

4) Traduire cette dérivée seconde spatiale pour le champ de température discrétisé T`[n, k]`.

5) À l'aide de l'équation de diffusion (1), déduire le champ de température T`[n, k+1]` à $t+\tau$ en fonction de T`[n, k]`, T`[n-1, k]` et T`[n+1, k]` à t. C'est le schéma d'Euler explicite de résolution de l'équation de la diffusion thermique (1).

Pour les sites sur les bords, T`[n-1, k]` ou T`[n+1, k]` n'existent pas. Il faut donc changer de schéma de résolution.

6) Construire un schéma d'Euler pour les deux sites $n = 0$ et $n =$`N`-1. On utilisera des développements limités mettant en jeu T`[n+2, k]` ou T`[n-2, k]`. On parle alors de schéma dissymétrique.

7) Quelle est l'ordre de l'erreur de ces schémas dissymétriques ?

CN5 — 02 Résolution de l'équation de diffusion

On considère une barre de cuivre de longueur $L = 1$ m, entre $x = -L/2$ et $L/2$, chauffée en son centre. Le coefficient de diffusion est $D_{\text{th}} = 10^{-5}$ m$^2\cdot$s^{-1}. Le champ de température initial donné par

$$T(x, t=0) = \begin{cases} T_0 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Utiliser le schéma d'Euler de l'exercice CN5-01 pour résoudre l'équation de diffusion partant de cette situation initiale. On tracera sur le même graphique le champ de température à différents temps (on introduira toutes les grandeurs nécessaires à l'exécution du programme).